Points de hauteur bornée sur les hypersurfaces des variétés toriques

Teddy Mignot

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Teddy Mignot

Thèse dirigée par **Emmanuel Peyre**

préparée au sein **Institut Fourier**
et de **l'École Doctorale MSTII**

Points de hauteur bornée sur les hypersurfaces des variétés toriques

Thèse soutenue publiquement le **23 novembre 2015**,
devant le jury composé de :

M. Roger Heath-Brown
Professeur, University of Oxford, Président
M. Antoine Chambert-Loir
Professeur, Université d'Orsay, Rapporteur
Mme Damaris Schindler
Ingénieur de Recherche, Institute for Advanced Study, Examinatrice
M. Régis De La Bretèche
Professeur, Université Paris Diderot, Examinateur
M. Tanguy Rivoal
Directeur de Recherche, CNRS, Examinateur
M. Emmanuel Peyre
Professeur, Université Joseph Fourier, Examinateur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Emmanuel Peyre pour m'avoir proposé un sujet de recherches aussi passionnant. Travailler sous sa direction fut aussi bien un honneur qu'un immense plaisir. Je ne saurais assez le remercier pour sa bienveillance, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et ses patientes et minutieuses relectures de mes (longs) manuscrits.

Je souhaite également exprimer ma gratitude à Roger Heath-Brown et à Antoine Chambert-Loir pour avoir accepté d'être les rapporteurs d'un aussi long texte. Leurs relectures et leurs conseils avisés m'on permis d'apporter bien des améliorations à ce mémoire. Je suis très flatté d'avoir de tels experts pour rapporteurs. Je tiens par ailleurs à remercier vivement Régis De La Bretèche, Tanguy Rivoal et Damaris Schindler pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Cette thèse a été préparée au sein de l'Institut Fourier. Je souhaite remercier les membres du groupe de recherche de Théorie des Nombres pour m'avoir, à plusieurs reprises, donné l'opportunité de présenter mes travaux lors de séminaires de Théorie des Nombres.

Un grand merci également à mes co-bureaux Clément et Jean-Matthieu, et de manière générale à mes collègues thésards Thibaut, Etienne, Guillaume, Federico, Kevin, Izabela, Pedro, Binbin, Raphaël, Zhizhong, Coline, Benjamin et tous les autres, aux côtés desquels j'ai passé des années particulièrement agréables et riches en échanges.

Je tiens aussi à remercier tous mes anciens professeurs depuis la primaire et tout particulièrement Kenji Iohara pour son soutien constant et Philippe Caldero pour m'avoir guidé sur Grenoble à partir de ma cinquième année d'étude, et pour m'avoir introduit auprès de mon directeur de thèse pour mon stage de Master.

Enfin, merci du fond du cœur à mes parents et à mes sœurs Eva et Tania pour leurs témoignages d'affection et pour leurs encouragements tout au long

de mes études.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Depuis les trente dernières années de nombreux progrès ont été réalisés dans l'étude du comportement asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur une varitété algébrique X dont le diviseur canonique a suffisamment de sections. En particulier, la conjecture de Manin, qui suggère une formule asymptotique générale pour ce nombre de points, a été vérifiée pour un grand nombre de variétés X. L'objectif de cette thèse est de démontrer cette conjecture pour des familles d'hypersurfaces de variétés toriques.

1.1 Conjecture de Manin

On considère une variété projective X de dimension n définie sur $\mathbf{Q}$, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X supposé très ample. Tout choix d'une base de sections de ce fibré fournit un plongement $\phi_{\mathcal{L}} : X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ pour un certain entier N tel que $\phi_{\mathcal{L}}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)) = \mathcal{L}$. Ce plongement permet alors de construire une hauteur $H_{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbf{Q})$. Considérons l'application $H_0 : \mathbf{P}^N(\mathbf{Q}) \to [0, \infty[$ définie pour $Q \in \mathbf{P}^N(\mathbf{Q})$ par :

$$H_0(Q) = \max_{i \in \{0,...,N\}} |x_i| = |\boldsymbol{x}|,$$

où $\boldsymbol{x} = (x_0, ..., x_N) \in \mathbf{Z}^{N+1}$ est un représentant primitif (i.e tel que $\mathrm{pgcd}_i(x_i) = 1$) du point Q. On définit alors $H_{\mathcal{L}} : X(\mathbf{Q}) \to [0, \infty[$ par :

$$\forall P \in X(\mathbf{Q}), \quad H_{\mathcal{L}}(P) = (H_0 \circ \phi_{\mathcal{L}})(P).$$

Le problème de Manin consiste alors à étudier, pour un ouvert dense de Zariski U de X, le comportement asymptotique du cardinal

$$\mathcal{N}_{U,H_{\mathcal{L}}}(B) = \mathrm{Card}\{P \in U(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathcal{L}}(P) \leqslant B\},$$

lorsque $B \to \infty$.

Dans l'ensemble de cette thèse, nous considérons exclusivement des variétés projectives X dont le fibré anticanonique ω_X^{-1} est très ample, et nous choisissons $\mathcal{L} = \omega_X^{-1}$. Nous notons alors

$$H_X = H_{\omega_X^{-1}}.$$

Le comportement asymptotique de $\mathcal{N}_{U,H_X}(B)$, pour un ouvert dense $U \subset X$ assez petit, est alors prédit par la conjecture de Manin :

Conjecture 1.1.1 (Batyrev/Manin/Peyre)**.** *Il existe un ouvert dense $U \subset X$ et une constante $C_{H_X}(X)$ tels que*

$$\mathcal{N}_{U,H_X}(B) \simeq_{B\to\infty} C_{H_X}(X)B(\log B)^{r-1},$$

où $r = \operatorname{rg}\operatorname{Pic}(X)$.

Remarquons que la constante $C_{H_X}(X)$ a reçu une interprétation conjecturale par Peyre dans [Pe1] que nous allons détailler.

Fixons une base $s_0, ..., s_N$ de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$. Pour toute place $\nu \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q})$, tout $\boldsymbol{x} \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ et toute section $s \in \Gamma(X, \omega_X^{-1})$ ne s'annulant pas en $\boldsymbol{x}$, on pose

$$||s(\boldsymbol{x})||_\nu = \left(\sup_{0\leqslant i\leqslant N}\left|\frac{s_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}\right|_\nu\right)^{-1}.$$

Par ailleurs pour tout $\nu \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q})$, on normalise la mesure de Haar $\mathrm{d}\,x_\nu$ sur $\mathbf{Q}_\nu$ de la façon suivante :

– Si $\nu = \infty$, alors $\mathrm{d}\,x_\nu$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$,
– Si $\nu \neq \infty$, alors $\int_{\mathcal{O}_\nu} \mathrm{d}\,x_\nu = 1$.

On définit alors une mesure borélienne sur $X(\mathbf{Q}_\nu)$ par (voir [Pe1, §2.2.1]) :

$$\omega_{H_X,\nu} = \left|\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\right|\right|_\nu \mathrm{d}\,x_{1,\nu} ... \mathrm{d}\,x_{n,\nu}$$

où $x_{1,\nu}, ..., x_{n,\nu}$ désignent des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point $\boldsymbol{x} \in X(\mathbf{Q}_\nu)$.

Si S est un ensemble fini de places sur $\mathbf{Q}$ contenant la place infinie, on note :

$$L_S(s, \operatorname{Pic}(\bar{X})) = \prod_{p\in\operatorname{Val}(\mathbf{Q})\setminus S} L_p(s, \operatorname{Pic}(\bar{X}))$$

$$L_p(s, \operatorname{Pic}(\bar{X})) = \frac{1}{\det(1 - p^{-s}\operatorname{Fr}_p \mid \operatorname{Pic}(X_{\bar{\mathbf{F}}_p}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})}$$

$$\lambda_\nu = \begin{cases} L_\nu(1, \operatorname{Pic}(\bar{X})) & \text{si} \quad \nu \in \operatorname{Val}(\mathbf{Q}) \setminus S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La formule conjecturée par Peyre, Batyrev et Tschinkel pour $C_{H_X}(X)$ (cf. [Pe2]) est alors :

$$C_{H_X}(X) = \alpha(X)\beta(X)\tau_{H_X}(X)$$

où l'on a posé :

$$\tau_{H_X}(X) = \lim_{s\to 1}(s-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(\bar{X}))} L_S(s, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \prod_{\nu\in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} \lambda_\nu^{-1}\omega_{H_X,\nu}.$$

$$\beta(X) = \mathrm{Card}(H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\bar{X}))),$$

$$\alpha(X) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1)!}\int_{C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee} e^{-\langle \omega_X^{-1}, \boldsymbol{y}\rangle} d\boldsymbol{y},$$

avec

$$C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee = \{\boldsymbol{y} \in (\mathrm{Pic}(X)\otimes \mathbf{R})^\vee \mid \forall \boldsymbol{x} \in C_{\mathrm{eff}}(X),\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \geqslant 0\},$$

1.2 Liste de résultats

Rappelons dans un premier temps que la conjecture de Manin n'est pas toujours vérifiée. En effet un contre-exemple a été obtenu par Batyrev et Tschinkel. Il s'agit des hypersurfaces de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définies par une équation bihomogène :

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(\boldsymbol{x}) y_i^3 = 0$$

où $l_0,\ l_1,\ l_2,\ l_3 \in \mathbf{Q}[\boldsymbol{x}]$ sont des formes linéaires indépendantes en $\boldsymbol{x} = (x_0, ..., x_n)$.

La conjecture de Manin a néanmoins été démontrée pour de très nombreux cas de variétés X. Citons en particulier le cas des variétés toriques traité dans un premier temps par Batyrev et Tschinkel dans [BT1], [BT2], [BT3] par des arguments d'analyse harmonique, puis par Salberger [Sa], dans un cadre plus restreint, à l'aide de méthodes plus explicites.

Par ailleurs, la démonstration de la conjecture pour le cas d'intersections complètes dans l'espace projectif résulte des travaux de Birch [Bi] basés sur la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Une nouvelle forme de la méthode du cercle élaborée par Heath-Brown dans [HB] a permis à Robbiani d'étudier le cas d'une hypersurface de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$. Plus récemment, une généralisation de la méthode du cercle combinée avec des résultats de sommations hyperboliques ont permis à Blomer et Brüdern d'étudier le cas d'hypersurfaces diagonales d'espaces multiprojectifs [B-B], puis à Schindler de traiter les intersections complètes des espaces biprojectifs $\mathbf{P}^{n_1} \times \mathbf{P}^{n_2}$ pour $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$

supposés assez grands (voir [Sch1] et [Sch2]).

Dans le présent mémoire, en nous appuyant sur les notations utilisées par Salberger dans [Sa], nous démontrons la conjecture de Manin pour des familles d'hypersurfaces de variétés toriques à l'aide de généralisations des méthodes employées par Schindler. Avant d'énoncer le résultat principal, il convient de faire quelques rappels sur les variétés toriques, ainsi que sur la méthode du cercle qui est au cœur de la démonstration.

1.3 Variétés toriques

Pour présenter les variétés toriques, il est nécessaire de rappeler les définitions suivantes :

Définition 1.3.1. *Étant donné un réseau N,*

- *un* cône polyédrique convexe *dans $N_{\mathbf{R}} = N \otimes \mathbf{R}$ est un ensemble σ de la forme*
$$\sigma = C\langle v_1, ..., v_k\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geqslant 0 \right\},$$
où $v_1, ..., v_k$ sont des vecteurs de N. On appelle dimension *du cône σ la dimension du $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par $v_1, ..., v_k$.*
- *Étant donné un cône σ dans $N_{\mathbf{R}}$, le cône dual de σ est l'ensemble*
$$\sigma^{\vee} = \{u \in N_{\mathbf{R}}^{\vee} \mid \forall v \in \sigma,\ \langle u, v\rangle \geqslant 0\},$$
où $N^{\vee}$ désigne le réseau dual de N.
- *On appelle* face *d'un cône σ l'ensemble des points d'annulation d'une forme linéaire positive sur ce cône.*

Définition 1.3.2. *Étant donné un réseau N, un* éventail *est un ensemble Δ de cônes polyédriques convexes de $N_{\mathbf{R}}$ vérifiant :*

1. *Pour tout cône $\sigma \in \Delta$, on a $\mathbf{0} \in \sigma$;*
2. *Toute face d'un cône de Δ est un cône de Δ ;*
3. *L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun de ces deux cônes.*

Nous noterons $\Delta_{\max}$ l'ensemble des cônes de Δ de dimension maximale. L'éventail est dit

- complet *si $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$,*
- régulier *si chaque cône de Δ est engendré par une famille de vecteurs pouvant être complétée en une base de N.*

Pour un cône polyédrique σ de $N_{\mathbf{R}}$ donné on définit le semi-groupe

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^\vee.$$

La *variété torique affine* sur un corps k associée à σ est la variété affine :

$$U_\sigma = \mathrm{Spec}(k[S_\sigma]) \tag{1.1}$$

On remarque que si σ, τ sont deux cônes de $N_{\mathbf{R}}$, alors

$$\tau \subset \sigma \Rightarrow U_\tau \subset U_\sigma.$$

Étant donné un réseau N et un éventail Δ, on définit une variété algébrique $X = X(\Delta)$ sur k par recollement des ouverts U_σ pour $\sigma \in \Delta$. Nous renvoyons le lecteur à [F, §1,2,3] pour plus de détails sur les variétés toriques. Remarquons que la variété $X(\Delta)$ est lisse (resp. complète) si Δ est régulier (resp. complet).

1.4 Méthode du cercle

Dans [Bi], Birch applique la méthode du cercle au cas d'intersections complètes de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}$. Nous allons présenter le principe de la méthode en nous restreignant, pour simplifier, au cas d'une hypersurface Y définie par une équation $f(\boldsymbol{x}) = 0$, où $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $f \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$ est un polynôme homogène de degré d fixé. Via une inversion de Möbius, le problème du calcul de $\mathcal{N}_{Y,H_Y}(B)$ peut être ramené au calcul de

$$N(B) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant B,\ f(\boldsymbol{x}) = 0\},$$

où $|\boldsymbol{x}| = \max_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|$. Nous voudrions alors pouvoir donner une formule asymptotique pour $N(B)$ sous forme d'un terme principal et d'un terme d'erreur. Plus précisément, d'après la conjecture de Manin, la formule attendue est :

$$N(B) = CB^{n-d} + o(B^{n-d}), \tag{1.2}$$

où C est une constante à préciser.

Pour obtenir cette formule, la méthode du cercle consiste dans un premier temps à introduire une série génératrice. Posons

$$\begin{array}{rccc} e : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ & x & \mapsto & e^{2\pi i x}, \end{array}$$

ainsi que, pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$S(\alpha, B) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n \\ |\boldsymbol{x}| \leqslant B}} e\left(\alpha f(\boldsymbol{x})\right).$$

Étant donné que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\int_0^1 e(\alpha k)\,\mathrm{d}\,\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k=0 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

on a

$$N(B) = \int_0^1 S(\alpha, B)\,\mathrm{d}\,\alpha.$$

Les principe de la méthode du cercle est alors de séparer l'intervalle d'intégration $[0,1]$ en deux parties :

– Les arcs majeurs : il s'agit de l'ensemble $\mathfrak{M}$ des $\alpha \in [0,1]$ « proches » d'un rationnel $\frac{a}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(a,q)=1$ et a, q assez « petits ».
– Les arcs mineurs ; c'est l'ensemble $\mathfrak{m} = [0,1[\backslash\mathfrak{M}$.

Pour savoir quels sont les arcs majeurs et les arcs mineurs appropriés, il est nécessaire d'obtenir une estimation suffisamment précise de $|S(\alpha,B)|$. Celle-ci est obtenue à l'aide d'inégalités de Hölder, de différentiation de Weyl et d'arguments de géométrie des nombres. Plus précisément, à l'issu de ces manipulations on montre que, pour un certain réel $K>0$, l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :

1. On a $|S(\alpha,B)| \ll B^{n-K}$,
2. Le réel α appartient à un ensemble $\mathfrak{M}$ qui sera l'ensemble des arcs majeurs.

Cette idée est naturelle si l'on considère que lorsque α n'appartient pas à $\mathfrak{M}$ (i.e. est loin d'être rationnel), alors $e(\alpha f(\boldsymbol{x}))$ se répartit aléatoirement sur le cercle unité et la somme $S(\alpha,B)$ est donc petite et donc donne un terme négligeable.

Si K est assez grand, alors en utilisant la condition 1, il est facile de montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha,B)|\,\mathrm{d}\,\alpha \ll B^{n-d-\nu}.$$

Par ailleurs, il est possible de montrer qu'il existe une constante C et un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\int_{\mathfrak{M}} |S(\alpha,B)|\,\mathrm{d}\,\alpha = CB^{n-d} + O(B^{n-d-\delta}),$$

ce qui permet donc de démontrer la formule (1.2), et donc la conjecture de Manin.

La méthode développée par Schindler pour les hypersurfaces des espaces biprojectifs est basée sur cette même méthode. Une telle hypersurface Y est définie comme l'ensemble des points $((x_0 : ... : x_{n_1}), (y_0 : ... : y_{n_2})) \in \mathbf{P}^{n_1-1} \times \mathbf{P}^{n_2-1}$ vérifiant $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, où $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_{n_1})$, $\boldsymbol{y} = (y_0, ..., y_{n_2})$ et $F \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ est un polynôme bihomogène de bidegré (d_1, d_2) fixé. La hauteur d'un point rationnel P de l'hypersurface est alors donnée par

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^{n_1-d_1}|\boldsymbol{y}|^{n_2-d_2},$$

où $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2}$ est un représentant primitif (i.e pgcd$(\boldsymbol{x})$ = pgcd$(\boldsymbol{y}) = 1$) du point P. Une inversion de möbius permet à nouveau de ramener le calcul de $\mathcal{N}_{U,H_Y}(B)$ à celui de

$$N_U(B) = \mathrm{Card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U \cap \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid |\boldsymbol{x}|^{n_1-d_1}|\boldsymbol{y}|^{n_2-d_2} \leqslant B,\ F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}.$$

La méthode utilisée par Schindler consiste dans un premier temps à poser, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$:

$$h(k_1, k_2) = \mathrm{Card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \cap U \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ |\boldsymbol{x}| = k_1,\ |\boldsymbol{y}| = k_2\},$$

de sorte que

$$N_U(B) = \sum_{k_1^{n_1-d_1}k_2^{n_2-d_2} \leqslant B} h(k_1, k_2).$$

Par un résultat de Blomer et Brüdern [B-B, Théorème 2.1] sur les sommations hyperboliques, évaluer $N_U(B)$ revient à trouver des formules asymptotiques (en $P_1, P_2 \geqslant 1$) pour

$$N_U(P_1, P_2) = \sum_{k_1 \leqslant P_1} \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1, k_2),$$

$$N_{U,k_1}(P_2) = \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1, k_2),$$

pour $k_1 \in \mathbf{N}$ fixé,

$$N_{U,k_2}(P_1) = \sum_{k_1 \leqslant P_1} h(k_1, k_2),$$

pour $k_2 \in \mathbf{N}$ fixé. Ces trois quantités peuvent alors être évaluées à l'aide de généralisations de la méthode du cercle.

1.5 Principaux résultats

1.5.1 Espaces triprojectifs

Dans la première partie de ce mémoire, nous considérons le cas très particulier des hypersurfaces de tridegré $(1, 1, 1)$ de l'espace triprojectif $\mathbf{P}^n \times$

$\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$. Une telle hypersurface Y est définie comme l'ensemble des points $((x_0 : ... : x_n), (y_0 : ... : y_n), (z_0 : ... : z_n)) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ vérifiant :

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sum_{0 \leqslant i,j,k \leqslant n} \alpha_{i,j,k} x_i y_j z_k = 0$$

pour des entiers $\alpha_{i,j,k}$ fixés. La hauteur H_Y associée à cette hypersurface est alors donnée par, pour tout point $P = ((x_0 : ... : x_n), (y_0 : ... : y_n), (z_0 : ... : z_n)) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$,

$$H_Y(P) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{x}|^n |\boldsymbol{y}|^n |\boldsymbol{z}|^n,$$

pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ primitifs (i.e pgcd$(\boldsymbol{x})$ = pgcd$(\boldsymbol{y})$ = pgcd$(\boldsymbol{z})$ = 1). Notons enfin π la projection canonique $(\mathbf{A}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})^3 \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$. Nous démontrons alors la conjecture de Batyrev-Manin pour l'hypersurface Y. Plus précisément, en notant

$$V_3^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, ..., n\}, \ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i y_j = 0\}, \tag{1.3}$$

$$V_2^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, ..., n\}, \ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i z_k = 0\}, \tag{1.4}$$

$$V_1^* = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, ..., n\}, \ \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{i,j,k} y_j z_k = 0\}, \tag{1.5}$$

nous établissons le résultat ci-dessous :

Théorème 1.5.1. *Supposons $n \geqslant 28$ et que $\dim V_i^* = n+1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Il existe un ouvert U de $\mathbf{A}^{3n+3}$ tel que*

$$N_{\pi(U) \cap Y, H_Y}(B) = C_{H_Y}(Y) B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)).$$

La méthode utilisée est inspirée de celle développée par Schindler dans [Sch1] et [Sch2] pour l'étude du cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs. En posant

$$\begin{aligned} h(k_1, k_2, k_3) = \mathrm{Card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{3n+3} \cap U \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0, \\ |\boldsymbol{x}| = k_1, \ |\boldsymbol{y}| = k_2, \ |\boldsymbol{z}| = k_3\}, \end{aligned}$$

nous commençons par évaluer

$$\sum_{k_1 \leqslant P_1} \sum_{k_2 \leqslant P_2} \sum_{k_3 \leqslant P_3} h(k_1, k_2, k_3)$$

en utilisant une variante de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Puis nous évaluons, respectivement pour k_1, k_2, k_3 fixé, les nombres

$$\begin{aligned} N_{k_1}(P_2, P_3) &= \sum_{k_2 \leqslant P_2} \sum_{k_3 \leqslant P_3} h(k_1, k_2, k_3) \\ N_{k_2}(P_1, P_3) &= \sum_{k_1 \leqslant P_1} \sum_{k_3 \leqslant P_3} h(k_1, k_2, k_3) \\ N_{k_3}(P_1, P_2) &= \sum_{k_1 \leqslant P_1} \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

à nouveau par la méthode du cercle. Enfin nous calculons respectivement pour (k_1, k_2), (k_1, k_3) et (k_2, k_3) fixés les nombres

$$\begin{aligned} N_{k_1,k_2}(P_3) &= \sum_{k_3 \leqslant P_3} h(k_1, k_2, k_3) \\ N_{k_1,k_3}(P_2) &= \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1, k_2, k_3) \\ N_{k_2,k_3}(P_1) &= \sum_{k_1 \leqslant P_1} h(k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

en utilisant des arguments de géométrie des réseaux. Les résultats obtenus combinés au théorème 2.1 de Blomer et Brüdern [B-B] permettent de démontrer le théorème 1.5.1.

Cette partie constitue une première étape dans la généralisation de la méthode développée par Schindler. En effet, l'une des difficultés supplémentaires de ce travail est que nous sommes confrontés à une variété dont le rang du groupe de Picard est 3 alors que ce rang valait 2 pour les variétés étudiées par Schindler. Cette partie donne donc une idée de la manière dont il est possible de généraliser la méthode de Schindler à des variétés de groupe de Picard de rang r quelconque.

1.5.2 Variétés toriques X telles que $\operatorname{rg} \operatorname{Pic}(X) = 2$

Dans la deuxième partie, nous démontrons la conjecture de Batyrev et Manin pour le nombre de points de hauteur bornée des hypersurfaces de certaines variétés toriques dont le rang du groupe de Picard est 2. Plus précisément, pour des entiers $0 < r \leqslant m \leqslant n$ fixés, nous considérons la variété torique X complète lisse définie comme le quotient de

$$X_1 = (\mathbf{A}^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times ((\mathbf{A}^{m-r} \times \mathbf{A}^{n-m+1}) \setminus \{0\}) \subset \mathbf{A}^{n+2}$$

par l'action du tore $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ définie par :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in X_1,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*,\ (\lambda, \mu).(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\lambda \boldsymbol{x}, \lambda\mu \boldsymbol{y}, \mu \boldsymbol{z}).$$

Notons $\pi : X_1 \to X$ la projection canonique. On considère alors l'hypersurface $Y = \pi(Y_1)$ de X où Y_1 est l'hypersurface donnée par une équation $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$, où F est un polynôme quasi-bihomogène de bidegré (d_1, d_2), c'est-à-dire :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in X_1,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*,\ F(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda\mu \boldsymbol{y}, \mu \boldsymbol{z}) = \lambda^{d_1} \mu^{d_2} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Pour tout $P \in X(\mathbf{Q})$, on peut choisir un représentant

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (x_0, ..., x_r, y_{r+1}, ..., y_m, z_{m+1}, ..., z_{n+1}) \in \mathbf{Z}^{n+2}$$

primitif (i.e $\mathrm{pgcd}_i(x_i) = \mathrm{pgcd}_{j,k}(y_j, z_k) = 1$), unique aux signes près. Nous munissons Y de la hauteur H définie par, pour $P = \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ avec $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2}$ primitif :

$$H(P) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1} \max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right)^{n-r+1-d_2}$$

où $|\boldsymbol{x}| = \max_{i\in\{0,...,r\}} |x_i|$, $|\boldsymbol{y}| = \max_{j\in\{r+1,...,m\}} |y_j|$ et $|\boldsymbol{z}| = \max_{k\in\{m+1,...,n+1\}} |z_k|$ (il s'agit d'une hauteur associée au fibré anticanonique de Y). Posons alors pour tout ouvert de Zariski U de X_1 :

$$\mathcal{N}(B) = \mathrm{card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \cap \pi(U) \mid H(P) \leqslant B\}.$$

En notant

$$V_1^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}^{n+2} \mid \forall i \in \{0, ..., r\},\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0, \\ \forall j \in \{r+1, ..., m\},\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}, \tag{1.6}$$

$$V_2^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}^{n+2} \mid \forall j \in \{r+1, ..., m\},\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0, \\ \forall k \in \{m+1, ..., n+1\},\ \frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}, \tag{1.7}$$

nous démontrons alors le résultat ci-dessous :

Théorème 1.5.2. *Pour $d_1, d_2 \geqslant 1$, si l'on suppose que $r \geqslant 6d_1 - 3$ et que*

$$n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > 13d_2(d_1 + d_2)2^{d_1+d_2},$$

alors il existe un ouvert U tel que :

$$\mathcal{N}_{U,H_Y}(B) = C_{H_Y}(Y)B\log(B) + O(B),$$

où $C_H(Y)$ est la constante conjecturée par Peyre, lorsque $B \to \infty$.

La méthode utilisée est à nouveau inspirée de celle développée par Schindler. Nous posons cette fois-ci :

$$h(k_1, k_2) = \mathrm{Card}\Big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0, \\ |\boldsymbol{x}| = k_1,\ \max\left(\left\lfloor\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}\right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right) = k_2\Big\},$$

et nous évaluons

$$N_U(P_1,P_2) = \sum_{k_1 \leqslant P_1} \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1,k_2),$$

et pour k_1, k_2 fixés

$$N_{U,k_1}(P_2) = \sum_{k_2 \leqslant P_2} h(k_1,k_2),$$

$$N_{U,k_2}(P_1) = \sum_{k_1 \leqslant P_1} h(k_1,k_2),$$

par une généralisation de la méthode du cercle.
Les résultats obtenus nous permettent de démontrer le théorème 1.5.2 par application d'une variante d'un théorème 2.1 de Blomer et Brüdern.

La difficulté de cette partie en comparaison des travaux de Schindler réside dans l'introduction des variables $\boldsymbol{y}$. Ces variables posent en particulier des difficultés pour la partie « différentiation de Weyl et géométrie des nombres » de la méthode du cercle, et nous sommes alors amenés à élaborer des généralisations des arguments de Schindler qui nous seront utiles ultérieurement pour le traitement de variétés toriques plus générales.

1.5.3 Variétés toriques plus générales

Enfin, dans la troisième partie, nous démontrons la conjecture de Manin pour une famille plus générale d'hypersurfaces de variétés toriques dont le groupe de Picard a pour rang un entier $r \geqslant 2$ quelconque dont le cône effectif est engendré par r vecteurs. On considère en effet une variété torique complète lisse $X = X(\Delta)$ de dimension n définie par le réseau $\mathbf{Z}^n$ et un éventail Δ ayant $n + r$ arêtes engendrées par des vecteurs notés $v_1, v_2, ..., v_{n+r} \in \mathbf{Z}^n$. Nous supposerons que $v_1, ..., v_n$ est une base de $\mathbf{R}^n$ et que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, il existe des entiers naturels $a_{i,j}$ tels que

$$v_{n+j} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i$$

(autrement dit $v_{n+1}, ..., v_{n+r}$ appartiennent au cône $C\langle -v_1, ..., -v_n\rangle$).

Nous poserons par ailleurs

$$\forall j,k \in \{1,...,r\}, \quad a_{n+k,j} = \delta_{j,k},$$

et

$$\forall j \in \{1,...,r\}, \quad n_j = \sum_{i=1}^{n+r} a_{i,j}.$$

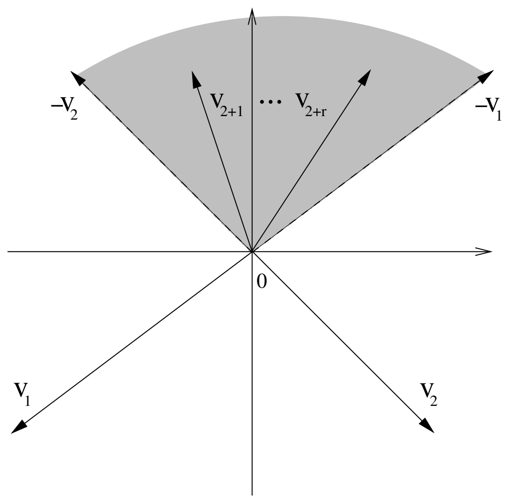

FIGURE 1.1 – Éventail en dimension $n = 2$.

Notons $I_1, ..., I_N$ les ensembles I minimaux pour l'inclusion tels que

$$\forall \sigma \in \Delta, \ \sum_{i \in I} \mathbf{R}^+ v_i \nsubseteq \sigma.$$

Par ailleurs, si $\Delta_{\max}$ désigne l'ensemble des cônes de dimension maximale de l'éventail Δ, la variété X peut être décrite comme le quotient de l'ouvert

$$X_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \exists \sigma \in \Delta_{\max}, \prod_{i \mid v_i \notin \sigma} x_i \neq 0\}$$

de l'espace affine par l'action de $(\mathbf{C}^*)^r$ définie par

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_r) \in (\mathbf{C}^*)^r, \ \forall \boldsymbol{x} \in X_1, \ \boldsymbol{t}.\boldsymbol{x} = \left(\prod_{j=1}^{r} t_j^{a_{i,j}} x_i \right)_{i \in \{1,...,n+r\}}.$$

Notons $\pi : X_1 \to X$ la projection canonique. Une hypersurface de X est de la forme $Y = \pi(Y_1)$ où

$$Y_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid F(\boldsymbol{x}) = 0\},$$

où $F \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$ est tel que

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_r) \in (\mathbf{C}^*)^r, \ \forall \boldsymbol{x} \in X_1, \ F(\boldsymbol{t}.\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{j=1}^{r} t_j^{d_j} \right) F(\boldsymbol{x}),$$

pour des degrés $(d_1, ..., d_r) \in \mathbf{N}^r$ fixés. Pour tout point $P \in X(\mathbf{Q})$ on peut choisir un représentant $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+r}$ primitif (au sens $\mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}}(\prod_{i \mid v_i \notin \sigma} x_i) =$

1) de P (unique aux signes près). La hauteur H_Y associée est alors de la forme, si $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+r}$ est primitif,

$$H_Y(\pi(\boldsymbol{x})) = H_Y(\boldsymbol{x}) = \max_{\sigma \in \Delta_{\max}} |M_\sigma(\boldsymbol{x})|,$$

où les $M_\sigma(\boldsymbol{x})$ sont des monômes de $\mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$. Pour tous $m \in \{1, ..., r\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_r$, on note

$$\mathcal{C}_{m,\tau} = \{(j,k) \mid j \in \{\tau(1), ..., \tau(m)\}, k \in \{1, ..., d_j\}, \ \exists i \in \{1, ..., n+r\} \mid a_{i,j} = k\}$$

$$\mathcal{D}_{m,\tau} = \{\boldsymbol{d} = (d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}} \in \mathbf{N}^{\mathcal{C}_{m,\tau}} \mid \forall j \in \{\tau(1), ..., \tau(m)\}, \ \sum_{k \geqslant 1} k d_{j,k} = d_j\},$$

$$\forall (j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}, \ \ J(j,k) = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid a_{i,j} = k\} \neq \emptyset.$$

Le polynôme F peut être décomposé sous la forme :

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}} F_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}),$$

où $F_{\boldsymbol{d}}$ est un polynôme homogène de degré $d_{j,k}$ en les variables $(x_i)_{i \in J(j,k)}$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}$. On pose alors pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}$, et tout $(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}$,

$$V^*_{m,\tau,\boldsymbol{d},(j,k)} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \forall i \in J(j,k), \ \frac{\partial F_{\boldsymbol{d}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}.$$

Posons enfin

$$n(F) = n + r - \max_{\substack{m \in \{1,...,r\} \\ \tau \in \mathfrak{S}_r}} \min_{\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}} \max_{(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}} \dim V^*_{m,\tau,\boldsymbol{d},(j,k)}.$$

Nous démontrons alors dans cette partie le théorème ci-dessous :

Théorème 1.5.3. *Pour tous $d_1, ..., d_r$, si Δ est tel que, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, $\operatorname{Card} I_k \geqslant 6$, si l'on suppose qu'une puissance de ω_Y^{-1} est engendrée par ses sections globales et que*

$$n(F) \geqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j} + 4) \left(\prod_{j=1}^r (3 + 10 d_j) \right) \left(\sum_{j=1}^r d_j \right),$$

alors il existe un ouvert U de X_1 tel que :

$$\mathcal{N}_{Y \cap \pi(U), H_Y}(B) = C_{H_Y}(Y) B (\log B)^{r-1} + O(B (\log B)^{r-2}).$$

La méthode pour établir ce résultat consiste dans un premier temps à suivre le procédé décrit par Salberger [Sa, §9,10] qui nous permet de partitionner $X_1(\mathbf{R})$ en des sous-ensembles $(C_{0,\sigma})_\sigma$ avec $H_Y(\pi(\boldsymbol{x})) = |M_\sigma(\boldsymbol{x})|$ pour tout $\boldsymbol{x} \in C_{0,\sigma} \cap \mathbf{Z}^{n+r}$ primitif. L'étude de $\mathcal{N}_{Y \cap \pi(U), H_Y}(B)$ peut alors être ramenée, quitte à appliquer une inversion de möbius pour s'affranchir de la condition de coprimalité, à celle de

$$N_{U,\sigma,\boldsymbol{e}}(B)=\mathrm{Card}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\cap U\cap C_{0,\sigma}\mid \forall i\in\{1,...,n+r\},\ e_i|x_i,\ F(\boldsymbol{x})=0,\ |M_\sigma(\boldsymbol{x})|\leqslant B\},$$

pour tous $\sigma\in\Delta_{\max}$ et $\boldsymbol{e}=(e_i)_{i\in\{1,...,n+r\}}\in\mathbf{N}^{n+r}$. En suivant à nouveau la description de Salberger [Sa, §11], on montre que ceci peut se réécrire sous la forme :

$$N_{U,\sigma,\boldsymbol{e},}(B)=\mathrm{Card}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\cap U\mid \forall i\in\{1,...,n+r\},\ e_i|x_i,|x_i|\leqslant\prod_{j=1}^r|N_j(\boldsymbol{x})|^{a_{i,j}},\ F(\boldsymbol{x})=0,\ \prod_{j=1}^r|N_j(\boldsymbol{x})|^{n_j-d_j}\leqslant B\},$$

où les $N_j(\boldsymbol{x})$ sont des monômes en $\boldsymbol{x}$ tels que

$$\forall\boldsymbol{t}=(t_1,...,t_r)\in(\mathbf{C}^*)^r,\ \ N_j(\boldsymbol{t}.\boldsymbol{x})=t_jN_j(\boldsymbol{x}).$$

Cette description nous permet alors d'introduire la fonction génératrice :

$$\forall(k_1,...,k_r)\in\mathbf{N}^r,\ h(k_1,...,k_r)=\mathrm{Card}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\cap U\mid\forall i\in\{1,...,n+r\},\ e_i|x_i\ \text{et}\ |x_i|\leqslant\prod_{j=1}^r k_j^{a_{i,j}},\ F(\boldsymbol{x})=0,\ \forall j\in\{1,...,r\},\ \lfloor|N_j(\boldsymbol{x})|\rfloor=k_j\},$$

de sorte que $N_{U,\sigma,\boldsymbol{e},}(B)$ est équivalent lorsque $B\to\infty$ à

$$\sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B}h(k_1,...,k_r).$$

Une généralisation de la méthode du cercle inspirée de celle développée dans les deux premières parties permet alors de donner une formule asymptotique en $P_1,...,P_r\geqslant 1$ pour

$$N_{U,\boldsymbol{e},\sigma}(P_1,...,P_r)=\sum_{k_1\leqslant P_1}...\sum_{k_r\leqslant P_r}h(k_1,...,k_r),$$

ainsi que pour

$$N_{U,\boldsymbol{e},\sigma,(k_j)_{j\in J}}((P_j)_{j\notin J})=\sum_{\forall j\notin J,\ k_j\leqslant P_j}h(k_1,...,k_r),$$

pour tous $(k_j)_{j\in J}$ fixés et tous $\emptyset\not\subseteq J\not\subseteq\{1,...,r\}$. Une généralisation du théorème [B-B, Théorème 2.1] nous permet alors d'en déduire la valeur de $N_{U,\boldsymbol{e},\sigma}(B)$ et ainsi de démontrer le théorème 1.5.3.

Afin de mieux comprendre les notations du théorème 1.5.3, donnons quelques exemples d'applications de ce résultat à des variétés toriques particulières.

Exemple 1.5.4. Cas des espaces multiprojectifs : nous considérons ici la variété torique $X = \mathbf{P}^{n_1} \times \mathbf{P}^{n_2} \times ... \times \mathbf{P}^{n_r}$ où $n_1, ..., n_r \in \mathbf{N}$ (on a alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) = r$). L'éventail correspondant à cette variété est construit de la façon suivante : si $n = \sum_{i=1}^{r} n_j$, et si l'on fixe une base $(v_{j,k})_{\substack{j\in\{1,...,r\}\\ k\in\{1,...,n_j\}}}$ du réseau $\mathbf{Z}^n$, on pose

$$\forall j \in \{1, ..., r\},\ v_{j,n_j+1} = -\sum_{i=1}^{n_j} v_{j,i}.$$

Notons par ailleurs

$$\forall j \in \{1, ..., r\},\ I_j = \{(j, 1), ..., (j, n_j + 1)\}.$$

L'éventail correspondant à X est alors

$$\Delta = (\sigma_{J_1,...,J_r})_{\emptyset \neq J_j \subset I_j}$$

où pour tous $(J_1, ..., J_r)$,

$$\sigma_{J_1,...,J_r} = C\langle((v_{(j,i)})_{(j,i)\in I_j \setminus J_j}\rangle.$$

Les ensembles I minimaux pour l'inclusion tels que

$$\forall \sigma \in \Delta,\ \sum_{i\in I} \mathbf{R}^+ v_i \not\subseteq \sigma$$

sont alors $I_1, ..., I_r$ de cardinaux respectifs $n_1 + 1, ..., n_r + 1$.

En notant $\boldsymbol{x}_j = (x_{j,1}, ..., x_{j,n_j+1})$ un ensemble de variables pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, la variété X peut également être décrite comme le quotient de

$$X_1 = \{(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_r) \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \exists (i_1, ..., i_r) \in I_1 \times ... \times I_r, \forall j \in \{1, ..., r\},\ x_{i_j} \neq 0\}$$

par l'action du tore l'action du tore $(\mathbf{C}^*)^r$ définie par :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in X_1,\ \forall (t_1, ..., t_r) \in (\mathbf{C}^*)^r,\ (t_1, ..., t_r).(\boldsymbol{x}) = (t_j x_{i,j})_{(j,i)\in I_j}.$$

(par conséquent, dans le cas présent chaque variable $x_{j,i}$ a pour poids $(a_{i,1}, ..., a_{i,r})$, avec $a_{i,k} = \delta_{j,k}$. On a donc pour tout $m \in \{1, ..., r\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_r$,

$$\mathcal{C}_{m,\tau} = \{(j, 1) \mid j \in \{\tau(1), ..., \tau(m)\}\}$$

et pour tout $j \in \{1, ..., r\}$,

$$J(j, 1) = \{(j, 1), ..., (j, n_j + 1)\} = I_j.$$

D'autre part, une hypersurface Y de X est donnée par un polynôme $F \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$ multihomogène de r-degré $(d_1, ..., d_r)$ (i.e. F est homogène de degré d_j en les $\boldsymbol{x}_j$, et ce pour tout $j \in \{1, ..., r\}$). On a alors que

$$\mathcal{D}_{m,\tau} = \{(d_{\tau(1)}, ..., d_{\tau(m)})\},$$

et que

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}, \ F_{\boldsymbol{d}} = F.$$

Ainsi, pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}$, et tout $(j,1) \in \mathcal{C}_{m,\tau}$,

$$V^*_{m,\tau,\boldsymbol{d},(j,1)} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \forall i \in I_j, \ \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\} = V^*_j$$

(indépendant de $m, \tau, \boldsymbol{d}$). On a alors que

$$n(F) = n + r - \max_{j \in \{1,...,r\}} \dim V^*_j.$$

Remarquons que $n(F) \leqslant \max\{n_1, ..., n_r\}$. Par conséquent, la formule du théorème 1.5.3 est vérifiée pour toute hypersurface de multidegré $(d_1, ..., d_r)$ de tout espace multiprojectif $\mathbf{P}^{n_1} \times \mathbf{P}^{n_2} \times ... \times \mathbf{P}^{n_r}$ dès lors que

$$n + r - \max_{j \in \{1,...,r\}} \dim V^*_j \geqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j} + 4) \left(\prod_{j=1}^r (3 + 10 d_j) \right) \left(\sum_{j=1}^r d_j \right).$$

Exemple 1.5.5. Considérons à présent la famille de variétés toriques définies dans la section 1.5.2. Pour ces variétés, les ensembles I minimaux pour l'inclusion tels que

$$\forall \sigma \in \Delta, \ \sum_{i \in I} \mathbf{R}^+ v_i \nsubseteq \sigma$$

sont $\{0, ..., r\}$ et $\{r+1, ..., n+1\}$. Rappelons que les variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ ont pour poids respectifs $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$ par l'action du tore $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$. Une hypersurface est donnée par un polynôme F homogène de degré d_1 en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et homogène de degré d_2 en $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. On a alors, pour tout $m \in \{1, 2\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_2$,

$$\mathcal{C}_{m,\tau} = \{(j,1) \mid j \in \{\tau(1), \tau(m)\}\}$$
$$\mathcal{D}_{m,\tau} = \{d_{\tau(1)}, d_{\tau(m)}\}$$

et pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}$, $F_{\boldsymbol{d}} = F$. Enfin, on a

$$V^*_{m,\tau,\boldsymbol{d},(1,1)} = V^*_1,$$
$$V^*_{m,\tau,\boldsymbol{d},(2,1)} = V^*_2,$$

où V^*_1 et V^*_2 ont été définies par (1.6) et (1.7). Ainsi,

$$n(F) = n + 2 - \max\{\dim V^*_1, \dim V^*_2\} \leqslant \{r+1, n-m+1\}\},$$

et la formule du théorème 1.5.3 est vérifiée pour toute hypersurface Y de X telle que

$$n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} \geqslant (12.2^{d_1+d_2}+8)(3+10d_1)(3+10d_2)(d_1+d_2).$$

Remarquons qu'ici la condition sur la valeur de $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\}$ est plus forte que celle du théorème 1.5.2. Ceci est dû au fait que la borne inférieure de $n(F)$ du théorème 1.5.3 n'est pas optimale. Nous verrons au cours du chapitre 4 que l'on peut obtenir une borne plus précise, mais également plus complexe (voir formule (4.93)).

Chapitre 2

Espaces triprojectifs

2.1 Introduction

On considère une hypersurface V de l'espace $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ définie par une équation $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ où

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{0 \leqslant i,j,k \leqslant n} \alpha_{i,j,k} x_i y_j z_k,$$

avec $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = ((x_0 : ... : x_n),(y_0 : ... : y_n),(z_0 : ... : z_n)) \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ et $\alpha_{i,j,k} \in \mathbf{Q}$. On dira que $(x_0,...,x_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ est *primitif* si $\mathrm{pgcd}(x_0,...,x_n) = 1$. Dans tout ce qui va suivre, on note pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}$:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^n \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |y_j|^n \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |z_k|^n,$$

qui définit une hauteur associée au fibré anticanonique, et

$$H'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |y_j| \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |z_k|,$$

où $(x_0,...,x_n)$, $(y_0,...,y_n)$, $(z_0,...,z_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ sont primitifs et tels que $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = ((x_0 : ... : x_n),(y_0 : ... : y_n),(z_0 : ... : z_n))$. Dans tout ce qui va suivre, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_0,...,x_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ nous noterons $|\boldsymbol{x}| = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$. On souhaite déterminer une formule asymptotique pour le nombre de points $([\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}],[\boldsymbol{z}])$ d'un ouvert de Zariski de l'hypersurface V de hauteur $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ bornée par B (on notera $\mathcal{N}_U(B)$ ce nombre de points), ce qui revient à évaluer, quitte à remplacer B par B^n

$$\begin{aligned} \tilde{N}_U(B) = \mathrm{card}\{&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \cap U \mid \\ &(x_0,...,x_n),(y_0,...,y_n),(z_0,...,z_n) \text{ primitifs, } H'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant B\}, \end{aligned}$$

où U désigne un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{C}} \times \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{C}} \times \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{C}}$. On a en effet

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{8}\tilde{N}_U(B^{\frac{1}{n}})$$

(le coefficient $\frac{1}{8}$ est dû au fait que deux vecteurs primitifs $\boldsymbol{x}$ et $-\boldsymbol{x}$ représentent le même élément de $\mathbf{P}^n$). Par une inversion de Möbius, on se ramène au calcul de

(2.1)
$$N_U(B) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1}\times\mathbf{Z}^{n+1}\times\mathbf{Z}^{n+1})\cap U \mid H'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant B\}.$$

Nous allons évaluer ce nombre $N_U(B)$ en suivant la méthode décrite par Schindler (cf. [Sch1], [Sch2]). Nous établirons en fait (voir proposition 2.6.2) que, pour un ouvert U bien choisi, ce nombre est

$$N_U(B) = \frac{1}{2}\sigma B^n \log(B)^2 + O(B^n\log(B)),$$

(où σ est une constante que nous préciserons), ce qui nous permettra d'en déduire que :

$$\mathcal{N}_U(B) = C(V)B^n\log(B)^2 + O(B^n\log(B)),$$

où $C(V)$ est la constante conjecturée par Peyre (cf.[Pe1]). Remarquons qu'il est ici indispensable de se restreindre à un ouvert de Zariski U. La variété V présente en effet des sous-variétés accumulatrices. Considérons par exemple un point $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1}\times\mathbf{Z}^{n+1}$ tel que :

$$\forall k \in \{0,...,n\},\ \sum_{i,j=0}^{n}\alpha_{i,j,k}x_iy_j = 0.$$

Alors, pour tout $\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ tel que $|\boldsymbol{z}| \leqslant B/(|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|)$ on aurait $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$, ce qui implique donc que

$$\mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in V\cap(\mathbf{Z}^{n+1}\times\mathbf{Z}^{n+1}\times\mathbf{Z}^{n+1}) \mid H'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant B\} \gg B^{n+1}.$$

On notera, pour $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{C}^{n+1}\times\mathbf{C}^{n+1}\times\mathbf{C}^{n+1}$:

$$\forall k \in \{0,...,n\},\ B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j,k}x_iy_j, \tag{2.2}$$

$$\forall j \in \{0,...,n\},\ B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{i,j,k}x_iz_k, \tag{2.3}$$

$$\forall i \in \{0,...,n\},\ B''_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{i,j,k}y_jz_k. \tag{2.4}$$

Par ailleurs, on définit

$$V_3^* = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}\times\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall k \in \{0,...,n\},\ B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\}, \tag{2.5}$$

$$V_2^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, ..., n\},\ B'_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0\}, \tag{2.6}$$

$$V_1^* = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, ..., n\},\ B''_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}. \tag{2.7}$$

On veut supposer que l'hypersurface V est lisse. Il nous sera également utile de supposer qu'elle vérifie par ailleurs la propriété suivante :

$$\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n + 1.$$

Il convient donc de démontrer qu'il existe des rationnels $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k}$ tels que ces propriétés soient vraies. En fait, nous allons montrer que chacune de ces propriété est vraie pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$.

Montrons que V est lisse pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$. Remarquons que $X = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ peut être vue comme une sous-variété lisse de $\mathbf{P}^N$ (où $N = (n+1)^3 - 1$) via le plongement de Segre :

$$\begin{aligned} s : &\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N \\ &([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}], [\boldsymbol{z}]) \mapsto [(x_i y_j z_k)_{i,j,k}]. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème de Bertini (cf. [Ha]), pour une famille ouverte dense d'hyperplans projectifs $H_{\boldsymbol{\alpha}} = \{(X_{i,j,k}) \mid \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} X_{i,j,k} = 0\} \subset \mathbf{P}^N$, on a que $X \cap H_{\boldsymbol{\alpha}}$ est lisse, or on remarque que :

$$X \cap H_{\boldsymbol{\alpha}} = \{([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}], [\boldsymbol{z}]) \in X \mid \sum_{i,j,k=0}^{n} \alpha_{i,jk} x_i y_j z_k = 0\}.$$

Par conséquent, V est lisse pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$.

Nous allons à présent montrer que pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$, on a $\dim V_3^* = n + 1$. On plonge $Y = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ dans $\mathbf{P}^{N'}$ (où $N' = (n+1)^2 - 1$) via le plongement de Segre. Toujours par application du théorème de Bertini, on a qu'il existe un ouvert dense d'hyperplans $H_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \{[X_{i,j}] \mid \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{i,j,0} X_{i,j} = 0\}$ ne contenant pas Y tels que $H_{\boldsymbol{\alpha}_0} \cap Y$ soit lisse. On a alors $\dim(Y \cap H_{\boldsymbol{\alpha}_0}) = 2n - 1$ pour chacun de ces hyperplans. On procède de même par la suite avec des hyperplans $H_{\boldsymbol{\alpha}_1}, ..., H_{\boldsymbol{\alpha}_n}$ (avec $H_{\boldsymbol{\alpha}_k} = \{[X_{i,j}] \mid \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{i,j,k} X_{i,j} = 0\}$). On trouve alors que, pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k}) = (\boldsymbol{\alpha}_0, ..., \boldsymbol{\alpha}_n) \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$, on a que

$$Y \cap H_{\boldsymbol{\alpha}_0} \cap ... \cap H_{\boldsymbol{\alpha}_n} = \{([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}]) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \mid B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\ \forall k\}$$

est lisse et de dimension $2n - (n+1) = n - 1$. Par conséquent, $\dim V_3^* = n + 1$ pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k} \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$. On montre de façon analogue que $\dim V_2^* = n+1$ et $\dim V_1^* = n+1$ pour un ouvert dense de $(\alpha_{i,j,k})$.

On conclut qu'il existe un ouvert dense d'éléments $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)}$ tels que l'hypersurface V qu'ils définissent soit lisse et telle que $\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n+1$. Nous supposerons donc dorénavant que V est une telle hypersurface.

La méthode employée ici pour évaluer $N_U(B)$ consiste dans un premier temps à donner une formule asymptotique pour le nombre $N_U(P_1, P_2, P_3)$ de points $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de $U \cap (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1})$ tels que $|\boldsymbol{x}| \leqslant P_1$, $|\boldsymbol{y}| \leqslant P_2$, $|\boldsymbol{z}| \leqslant P_3$ (ici $|\boldsymbol{x}|$ désignera $\max_i |x_i|$). On démontre en fait que l'on a une formule du type

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O\left(P_1^n P_2^n P_3^n \min\{P_1, P_2, P_3\}^{-\delta}\right) \tag{2.8}$$

pour des constantes σ et $\delta > 0$ que nous préciserons. Par la suite, on utilise des résultats semblables à ceux de la section 9 de [Sch2] pour en déduire $N_U(B)$.

Dans la section 2, en utilisant des arguments issus de la méthode du cercle, on établit la formule (2.8) pour P_1, P_2, P_3 « relativement proches » et tels que $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$. Plus précisément on montre (cf. proposition 2.2.12) que si $P_2 = P_1^b$ et $P_3 = P_1^{b'}$ avec $1 \leqslant b \leqslant b'$ et si $1 + b + b' < n + 1$, alors la formule (2.8) est vérifiée. Par la suite dans la section 3, pour un $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+1}$, on donne une formule asymptotique pour le nombre de points $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de la fibre $V_{\boldsymbol{x}}$ de V tels que $|\boldsymbol{y}| \leqslant P_2$ et $|\boldsymbol{z}| \leqslant P_3$ en utilisant à nouveau la méthode du cercle. Les résultats obtenus combinés avec ceux de la section 2 nous permettrons dans la section 4 d'établir la formule (2.8) pour b, b' arbitrairement grands mais vérifiant $b' \leqslant b + 1 + \nu$ (avec $\nu > 0$ arbitrairement petit) (voir proposition 2.4.4). La section 5 est consacrée au cas où $b' > b + 1 + \nu$. On résout ce problème en invoquant des résultats de géométrie des nombres, et plus précisément de comptage de points d'un réseau hyperplan dans un domaine borné. Tout ceci permet finalement de démontrer la formule (2.8) pour tous P_1, P_2, P_3 (cf. proposition 2.5.3). Dans la section 6, on utilise les résultats établis par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour conclure quant à la valeur de $N_U(B)$ à partir des résultats obtenus pour $N_U(P_1, P_2, P_3)$. Enfin, la section 7 est consacrée à l'étude des constantes intervenant dans la formule asymptotique obtenue pour $\mathcal{N}_U(B)$. On vérifie en particulier que le résultat est bien en accord avec les conjectures avancées par Peyre dans [Pe1].

2.2 Première étape

Dans cette première partie, nous allons démontrer, pour $1 \leqslant P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$, que le nombre

$$\begin{aligned} N(P_1,P_2,P_3) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0, F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} \end{aligned}$$

(où $P_i\mathcal{B}_i = P_i[-1,1]^{n+1} = [-P_i,P_i]^{n+1}$) est du type

$$N(P_1,P_2,P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

pour n assez grand. La méthode utilisée est inspirée de l'article [Sch1].

2.2.1 Sommes d'exponentielles

Soit $\alpha \in [0,1]$, on pose

$$S(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y} \in P_2\mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0}} \sum_{\boldsymbol{z} \in P_3\mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \tag{2.9}$$

où e désigne l'application $x \mapsto \exp(2i\pi x)$. On commence par remarquer que, pour $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ fixés :

$$\left| \sum_{\boldsymbol{z} \in P_3\mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \right| \ll \prod_{k=0}^{n} \min\left(P_3, ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})||^{-1}\right) \tag{2.10}$$

où, pour $a \in \mathbf{R}$, $||a||$ désigne la distance de a à $\mathbf{Z}$, autrement dit $||a|| = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |a-m|$. Considérons $\boldsymbol{r} = (r_0,...,r_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$. On note, pour $\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1$ fixé :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{y} \in P_2\mathcal{B}_2 \mid \forall k,\ r_k P_3^{-1} \leqslant \{\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} \leqslant (r_k+1)P_3^{-1}\},$$

où, pour $m \in \mathbf{R}$, $\{m\}$ désigne la partie fractionnaire de m. En notant $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ le cardinal de $\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$, on a alors que, pour $\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1$ fixé, d'après (2.10) :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\boldsymbol{y} \in P_2\mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0}} \sum_{\boldsymbol{z} \in P_3\mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \\ &\qquad \ll \sum_{|\boldsymbol{r}| \leqslant P_3} A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \prod_{k=0}^{n} \min\left(P_3, \max\left(\frac{P_3}{r_k}, \frac{P_3}{P_3 - r_k - 1}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

D'autre part, si $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})^2$, on a alors :

$$||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})|| = ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - \alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|| < P_3^{-1}.$$

Par conséquent, si l'on note

$$N(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in P_2\mathcal{B}_2 \mid \forall k \in \{0, ..., n\},\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| < P_3^{-1}\},$$

on a alors $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) \leqslant N(\boldsymbol{x}) + 1$ pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}$, et la formule (2.11) donne alors :

$$\begin{aligned} |S(\alpha)| &\ll \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1} N(\boldsymbol{x}) \sum_{|\boldsymbol{r}|\leqslant P_3} \prod_{k=0}^{n} \min\left(P_3, \max\left(\frac{P_3}{r_k}, \frac{P_3}{P_3 - r_k - 1}\right)\right) \\ &\ll \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1} N(\boldsymbol{x}) \prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{\lfloor P_3 \rfloor} \min\left(P_3, \max\left(\frac{P_3}{r}, \frac{P_3}{P_3 - r - 1}\right)\right)\right) \\ &\ll \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1} N(\boldsymbol{x})(P_3 \log(P_3))^{n+1} \\ &\ll P_3^{n+1+\varepsilon} M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et

$$M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) = \operatorname{card}\big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \\ |\boldsymbol{y}| \leqslant P_2,\ \forall k\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| \leqslant P_3^{-1}\big\}. \tag{2.12}$$

On a donc établi le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit $\alpha \in [0, 1]$, $P > 0$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Pour tout réel $\kappa > 0$ fixé, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$.
2. $M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) \gg P_1^{n+1} P_2^{n+1} P^{-\kappa}$.

Nous allons à présent réexprimer la deuxième assertion de ce lemme, en utilisant [Sch1, lemme 3.1] pour évaluer $M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1})$.

2.2.2 Une inégalité de type Weyl

Rappelons le résultat suivant (cf. [Sch1, lemme 3.1]) :

Lemme 2.2.2 (Schindler). *Soient n_1, n_2 des entiers et $\lambda_{i,j}$ des réels pour $1 \leqslant i \leqslant n_1$ et $1 \leqslant j \leqslant n_2$. On considère les formes linéaires*

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{n_2} \quad L_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{i,j} u_j \quad i \in \{1, ..., n_1\}$$

ainsi que

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{n_1} \quad L_j^t(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{i,j} u_i \quad j \in \{1, ..., n_2\}.$$

D'autre part, étant donné un réel $a > 1$, on note

$$U(Z) = \mathrm{card}\{(u_1, ..., u_{n_2}, ..., u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall j \in \{1, ..., n_2\},\ |u_j| < aZ,$$
$$\forall i \in \{1, ..., n_1\},\ |L_i(u_1, ..., u_{n_2}) - u_{n_2+i}| < a^{-1}Z\},$$

et de même

$$U^t(Z) = \mathrm{card}\{(u_1, ..., u_{n_1}, ..., u_{n_1+n_2}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall i \in \{1, ..., n_1\},\ |u_i| < aZ,$$
$$\forall j \in \{1, ..., n_2\},\ |L_j^t(u_1, ..., u_{n_1}) - u_{n_1+j}| < a^{-1}Z\}.$$

On a alors, si $0 < Z_1 \leqslant Z_2 \leqslant 1$:

$$U(Z_2) \ll \max\left(\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} a^{n_2-n_1} U^t(Z_1)\right).$$

Remarque 2.2.3. *Par la démonstration de [Sch1, lemme 3.1], on a que cette majoration de $U(Z_2)$ est indépendante des $\lambda_{i,j}$ choisis.*

Nous allons appliquer ce lemme, pour un $\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1}$ fixé, aux réels $(\lambda_{k,j})_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} = (\alpha \sum_{i=0}^n \alpha_{i,j,k} x_i)_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$, de sorte que

$$L_k(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=0}^n \lambda_{k,j} y_j = \alpha \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j,k} x_i y_j = \alpha B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

et

$$L_j^t(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,j} z_k = \alpha \sum_{0\leqslant i,k\leqslant n} \alpha_{i,j,k} x_i z_k = \alpha B'_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

Dans ce qui va suivre, pour tous réels strictement positifs H_1, H_2, H_3, on note :

$$\mathcal{M}_1(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{z}| \leqslant H_1,$$
$$|\boldsymbol{y}| \leqslant H_2,\ \forall i\ ||\alpha B''_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})|| < H_3\}, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{M}_2(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant H_1,$$
$$|\boldsymbol{z}| \leqslant H_2,\ \forall j\ ||\alpha B'_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})|| < H_3\}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{M}_3(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant H_1,$$
$$|\boldsymbol{y}| \leqslant H_2,\ \forall k\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| < H_3\}, \tag{2.15}$$

et $M_i(\alpha, H_1, H_2, H_3) = \mathrm{Card}\,\mathcal{M}_i(\alpha, H_1, H_2, H_3)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. On fixe un réel $\theta_2 \in [0, 1]$ tel que $P_2^{\theta_2} < P_1$. On choisit alors des paramètres Z_1, Z_2 et a tels que :

$$P_2 = aZ_2,\ P_3^{-1} = a^{-1}Z_2,\ P_2^{\theta_2} = aZ_1,$$

ce qui implique :

$$a^{-1}Z_1 = P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}.$$

On a alors, d'après le lemme 2.2.2 :

$$\begin{aligned} U(Z_2) &= \operatorname{card}\{\boldsymbol{y} \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant P_2,\ \forall k \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|| < P_3^{-1}\} \\ &\ll \max\left(\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n+1} U(Z_1), \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n+1} U^t(Z_1)\right) \\ &= P_2^{(n+1)(1-\theta_2)} \max\left(U(Z_1), U^t(Z_1)\right) \end{aligned}$$

(cette majoration étant indépendante de $\boldsymbol{x}$) avec

$$U(Z_1) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{y} \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant P_2^{\theta_2},\ \forall k \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|| < P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\},$$

$$U^t(Z_1) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{z} \mid |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2^{\theta_2},\ \forall j \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_j'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})|| < P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\}.$$

En sommant ces majorations sur tous les $\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1] \cap \mathbf{Z}^{n+1}$, on trouve alors :

$$\begin{aligned} &M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1}) \\ &\ll P_2^{(n+1)(1-\theta_2)}\left(M_3(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) + M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1})\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Par la suite, on applique à nouveau le lemme 2.2.2 en prenant cette fois-ci un $\boldsymbol{y} \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1}$, et en choisissant $(\lambda_{i,k})_{i,k} = \left(\alpha \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j,k} y_j\right)_{i,k}$, ainsi que :

$$aZ_2 = P_1,\ a^{-1}Z_2 = P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},\ aZ_1 = P_1^{\theta_1},\ a^{-1}Z_1 = P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},$$

où θ_1 est un réel appartenant à $[0,1]$ tel que $P_1^{\theta_1} = P_2^{\theta_2}$. On a alors que :

$$\begin{aligned} U(Z_2) &= \operatorname{card}\{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1,\ \forall k \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|| < P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\} \\ &\ll \max\left(\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n+1} U(Z_1), \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n+1} U^t(Z_1)\right) \\ &= P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} \max\left(U(Z_1), U^t(Z_1)\right), \end{aligned}$$

avec

$$U(Z_1) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1^{\theta_1},\ \forall k \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|| < P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\},$$

$$U^t(Z_1) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{z} \mid |\boldsymbol{z}| \leqslant P_1^{\theta_1},\ \forall i \in \{0,...,n\}\ ||\alpha B_i''(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|| < P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\}.$$

Puis, en sommant sur les $\boldsymbol{y} \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1} \cap \mathbf{Z}^{n+1}$, on trouve :

$$\begin{aligned} M_3(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) \ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)}(&M_3(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) \\ &+ M_1(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1})). \end{aligned} \tag{2.17}$$

En procédant de la même manière pour $M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1})$ (en appliquant cette fois-ci le lemme 2.2.2 à $(\lambda_{i,j}) = (\alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,j,k} z_k)$ pour un $z \in [-P_2^{\theta_2}, P_2^{\theta_2}]^{n+1}$ fixé, et en prenant à nouveau $aZ_2 = P_1$, $a^{-1}Z_2 = P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}$, $aZ_1 = P_1^{\theta_1}$, $a^{-1}Z_1 = P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}$) on trouve :

(2.18)

$$\begin{aligned} M_2(\alpha, P_1, P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) \ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} (&M_2(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) \\ &+ M_1(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1})). \end{aligned}$$

En regroupant les résultats obtenus en (2.16), (2.17), (2.18), on trouve :

(2.19) $M_3(\alpha, P_1, P_2, P_3^{-1})$

$$\ll P_1^{(n+1)(1-\theta_1)} P_2^{(n+1)(1-\theta_2)} \max_{i\in\{1,2,3\}} M_i(\alpha, P_1^{\theta_1}, P_2^{\theta_2}, P_1^{-1+\theta_1}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}).$$

On déduit de ceci et du lemme 2.2.1 le résultat suivant :

Lemme 2.2.4. *Soit $\alpha \in [0,1]$, $P > 0$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. On note θ le réel tel que $P_1^{\theta_1} = P_2^{\theta_2} = P^{\theta}$. Pour un réel $\kappa > 0$ fixé, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. $|S(\alpha)| < P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1+\varepsilon}P^{-\kappa}$.
2. *Il existe un entier $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que*

$$M_i(\alpha, P^{\theta}, P^{\theta}, P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta}) \gg P^{2(n+1)\theta-\kappa}.$$

Considérons à présent un couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{M}_3(\alpha, P^{\theta}, P^{\theta}, P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta})$ tel qu'il existe un entier $k_0 \in \{0, ..., n\}$ tel que $B_{k_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$. On note alors $q = |B_{k_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$. Par définition de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, on a que $q \ll P^{2\theta}$. On note alors a l'entier le plus proche de $\alpha B_{k_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\delta = \alpha B_{k_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - a$. On a alors $\alpha q = a + \delta$, et donc :

$$|q\alpha - a| = |\delta| = ||\alpha B_{k_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| < P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta}.$$

Quitte à modifier θ, on peut récrire ceci sous la forme :

$$2|q\alpha - a| < P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta}$$

(l'introduction du facteur 2 permettra par la suite de simplifier les notations). En procédant de même avec des couples $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{M}_2(\alpha, P^{\theta}, P^{\theta}, P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta})$ ou $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{M}_1(\alpha, P^{\theta}, P^{\theta}, P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P^{2\theta})$, et en utilisant le lemme précédent, on obtient le résultat ci-dessous :

Lemme 2.2.5. *Pour un réel $\kappa > 0$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$.
2. *Il existe des entiers* a, q *tels que* $1 \leqslant q \ll P^{2\theta}$, $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$ *et*
$$2|q\alpha - a| \leqslant P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta}.$$
3. *On a*
$$\mathrm{card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{y}| \leqslant P^\theta,\ \forall k \in \{0, ..., n\}\ B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\} \geqslant C P^{2(n+1)\theta - \kappa}.$$
4. *On a*
$$\mathrm{card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P^\theta,\ \forall j \in \{0, ..., n\}\ B'_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0\} \geqslant C P^{2(n+1)\theta - \kappa}.$$
5. *On a*
$$\mathrm{card}\{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P^\theta,\ \forall i \in \{0, ..., n\}\ B''_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\} \geqslant C P^{2(n+1)\theta - \kappa}.$$

Remarquons que les conditions 3, 4, 5 impliquent respectivement : $\dim V_3^* \geqslant 2(n+1) - \kappa/\theta$, $\dim V_2^* \geqslant 2(n+1) - \kappa/\theta$, $\dim V_1^* \geqslant 2(n+1) - \kappa/\theta$, (voir par exemple la démonstration du théorème 3.1 de [Br]).

A partir d'ici, nous allons poser $\kappa = K\theta$, et nous supposerons
$$K = 2(n+1) - \max_{i \in \{1,2,3\}} \dim V_i^* - \varepsilon = n + 1 - \varepsilon,$$
(rappelons que nous avons supposé que les $\alpha_{i,j,k}$ sont tels que $\dim V_1^* = \dim V_2^* = \dim V_3^* = n+1$). D'autre part, nous fixerons dorénavant $P = P_1 P_2 P_3$, que l'on peut aussi écrire $P = P_1^{1+b+b'}$, en notant $P_2 = P_1^b$ et $P_3 = P_1^{b'}$, avec $1 \leqslant b \leqslant b'$, puisque $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$. Etant donné que l'on a $P^\theta = P_2^{\theta_2} = P_1^{\theta_1}$, on peut remarquer que l'on a alors :
$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{b},\ \theta = \frac{\theta_1}{1 + b + b'}.$$
Par ailleurs nous noterons, à partir d'ici, (pour un θ fixé) $\mathfrak{M}(\theta)$ l'ensemble des $\alpha \in [0,1]$ satisfaisant la condition (2) du lemme précédent, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{M}(\theta) = \{\alpha \in [0,1] \mid \exists\, q, a \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{pgcd}(a,q) = 1,\ 1 \leqslant q \ll P^{2\theta},\ 2|q\alpha - a| \ll P^{-1+2\theta}\}. \tag{2.20}$$

Pour le choix de K effectué ci-dessus, on voit que le lemme 2.2.5 implique :

Lemme 2.2.6. *Soit* $0 < \theta < (1 + b + b')^{-1}$, *et* $\varepsilon > 0$. *L'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. $|S(\alpha)| < P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta + \varepsilon}$.
2. *Le réel* α *appartient à l'ensemble* $\mathfrak{M}(\theta)$.

2.2.3 La méthode du cercle

On suppose à présent que l'on a $K = n + 1 - \varepsilon > \max(4, b + b' + 1)$. On choisit par ailleurs des réels $\delta > 0$ et $\theta_0 \in [0, 1]$ (avec δ arbitrairement petit) tels que :

$$K - 4 = n - 3 - \varepsilon > 2\delta\theta_0^{-1}, \tag{2.21}$$

$$K = n + 1 - \varepsilon > (2\delta + 1)(1 + b + b'), \tag{2.22}$$

$$1 > 10(1 + b + b')\theta_0 + (1 + b + b')\delta = (1 + b + b')(10\theta_0 + \delta). \tag{2.23}$$

On établit alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.7. *On a une majoration*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_0)} |S(\alpha)| d\alpha \ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta}.$$

Démonstration. On considère une suite d'éléments θ_i tels que $0 < \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{T-1} < \theta_T$, $\theta_T \leqslant (1 + b + b')^{-1}$ et $\theta_T K = \theta_T(n + 1 - \varepsilon) > 2\delta + 1$ (un tel choix de θ_T est possible d'après (2.22)). On choisit de plus les θ_i tels que $(\theta_{t+1} - \theta_t) \leqslant \frac{1}{8}\delta$. Pour un $\delta > 0$ fixé, on peut choisir une telle suite avec $T \ll P^{\frac{\delta}{4}}$, ce que nous supposerons. On a alors, d'après le lemme 2.2.6 :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S(\alpha)| d\alpha &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_T + \varepsilon} \\ &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta} \end{aligned}$$

(puisque $\theta_T K > 2\delta + 1$). On a par ailleurs, par définition de $\mathfrak{M}(\theta)$:

$$\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}(\theta)) \ll \sum_{q \ll P^{2\theta}} \sum_{\substack{|a| < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P^{2\theta} \ll P^{-1+4\theta}.$$

On a alors, toujours par le lemme 2.2.6, pour tout $t \in \{0, ..., T - 1\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)} S(\alpha) d\alpha &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_t + \varepsilon} \,\mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)\right) \\ &\ll P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K\theta_t + \varepsilon - 1 + 4\theta_{t+1}}. \end{aligned}$$

Or, puisque $2\delta\theta_0^{-1} < K - 4$ (cf. 2.21), en rappelant que $(\theta_{t+1} - \theta_t) \leqslant \frac{1}{8}\delta$, on a

$$\begin{aligned} -K\theta_t + 4\theta_{t+1} &< -2\delta\theta_0^{-1}\theta_t + 4(\theta_{t+1} - \theta_t) \\ &\leqslant -2\delta\theta_0^{-1}\theta_t + \frac{\delta}{2} \leqslant -\frac{3}{2}\delta. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha\notin\mathfrak{M}(\theta_0)}|S(\alpha)|d\alpha &= \sum_{t=0}^{T-1}\int_{\alpha\in\mathfrak{M}(\theta_{t+1})\setminus\mathfrak{M}(\theta_t)}|S(\alpha)|d\alpha + \int_{\alpha\notin\mathfrak{M}(\theta_T)}|S(\alpha)|d\alpha \\ &\ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}\left(\sum_{t=0}^{T-1}P^{-K\theta_t+\varepsilon-1+4\theta_{t+1}}+P^{-1-\delta}\right) \\ &\ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}(TP^{\varepsilon-1-\frac{3}{2}\delta}+P^{-1-\delta}) \\ &\ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-1-\delta}.\end{aligned}$$

□

On définit à présent une nouvelle famille d'arc majeurs, pour $q \geqslant 1$, et $a \in \mathbf{Z}$:

$$\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \{\alpha \in [0,1] \mid |q\alpha - a| \leqslant qP^{-1+2\theta}\}$$

et

$$\mathfrak{M}'(\theta) = \bigcup_{1\leqslant q\ll P^{2\theta}}\ \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$$

(remarquons que ce nouvel ensemble $\mathfrak{M}'(\theta)$ contient $\mathfrak{M}(\theta)$). On peut voir facilement que les ensembles $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$, (pour $1 \leqslant q \ll P^{2\theta}$, et $0 \leqslant a < q$, $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$) sont disjoints lorsque $\theta < \frac{1}{8}$. En effet si l'on suppose, par l'absurde qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$, avec $(a,q) \neq (a',q')$. On a alors, puisque $\mathrm{pgcd}(a,q) = \mathrm{pgcd}(a',q') = 1$:

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \left|\frac{a}{q}-\frac{a'}{q'}\right| \leqslant \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| + \left|\alpha-\frac{a'}{q'}\right| \ll P^{-1+2\theta}.$$

On aurait alors :

$$1 \leqslant qq'P^{-1+2\theta} \ll P^{-1+6\theta},$$

ce qui est absurde pour $\theta < \frac{1}{6}$. En particulier, puisque $\theta_0 < \frac{1}{10}$ (d'après (2.23)), les ensembles $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$ sont disjoints. On a alors immédiatement, par le lemme 2.2.7 (puisque $\mathfrak{M}(\theta_0) \subset \mathfrak{M}'(\theta_0)$) :

Lemme 2.2.8. *On a l'estimation :*

$$N(P_1,P_2,P_3) = \sum_{1\leqslant q\ll P^{2\theta_0}}\ \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)}S(\alpha)d\alpha + O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-1-\delta}).$$

Etant donné $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$, on pose $\alpha = \frac{a}{q}+\beta$, avec $|\beta| \leqslant P^{-1+2\theta_0}$. On introduit à présent les notations :

$$S_{a,q} = \sum_{\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)},\boldsymbol{b}^{(3)}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)},\boldsymbol{b}^{(3)})\right) \tag{2.24}$$

et

$$I(\beta) = \int_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e(\beta F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) d\boldsymbol{u} d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{w}. \tag{2.25}$$

On établit le résultat suivant :

Lemme 2.2.9. *Soit* $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$, *avec* $q \ll P^{2\theta_0}$, *et* $0 \leqslant a < q$, $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$ *et* $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ *On a alors :*

$$S(\alpha) = P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} q^{-3n-3} S_{a,q} I(P\beta) + O(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{4\theta_0} P_1^{-1}).$$

Démonstration. Remarquons dans un premier temps que :

$$S(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\boldsymbol{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) + \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2) \cap \mathbf{Z}^{2n+2} \cap V_3^*\} P_3^{n+1}.$$

Or, puisque $\dim(V_3^*) = n+1$ et que $P_1 \leqslant P_2$, on a

$$S(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_2 \mathcal{B}_2 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} \sum_{\boldsymbol{z} \in P_3 \mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1}} e(\alpha F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) + O(P_2^{n+1} P_3^{n+1}).$$

On peut alors écrire

$$S(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(3)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(3)})\right) S_3(\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(3)}) + O(P_2^{n+1} P_3^{n+1}), \tag{2.26}$$

avec

$$S_3(\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(3)}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}' \\ (q\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b}^{(1)}, q\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^{(2)}, q\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{b}^{(3)}) \\ \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \times P_3 \mathcal{B}_3}} e(\beta F(q\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b}^{(1)}, q\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^{(2)}, q\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{b}^{(3)})).$$

On considère à présent deux triplets $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'), (\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'', \boldsymbol{z}'') \in P_1 \mathcal{B}_1 \times P_2 \mathcal{B}_2 \times P_3 \mathcal{B}_3$ tels que :

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x'_i - x''_i| \leqslant 2, \ \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |y'_j - y''_j| \leqslant 2, \ \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |z'_k - z''_k| \leqslant 2.$$

Dans ce cas, on a

$$\left| F(q\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b}^{(1)}, q\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^{(2)}, q\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{b}^{(3)}) - F(q\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{b}^{(1)}, q\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{b}^{(2)}, q\boldsymbol{z}'' + \boldsymbol{b}^{(3)}) \right| \ll q(P_1 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3) \ll q P_2 P_3.$$

Remarquons que $q < \min\{P_1, P_2, P_3\} = P_1$, étant donné que $q \ll P^{2\theta_0}$ et $\theta_0 < \frac{1}{8(b+b'+1)}$ d'après (2.23). On peut alors remplacer la somme S_3 par une intégrale, et on obtient :

$$S_3(\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(3)}) = \int_{q\tilde{\boldsymbol{u}} \in P_1\mathcal{B}_1} \int_{q\tilde{\boldsymbol{v}} \in P_2\mathcal{B}_2} \int_{q\tilde{\boldsymbol{w}} \in P_3\mathcal{B}_3} e(\beta F(q\tilde{\boldsymbol{u}}, q\tilde{\boldsymbol{v}}, q\tilde{\boldsymbol{w}})) d\tilde{\boldsymbol{u}} d\tilde{\boldsymbol{v}} d\tilde{\boldsymbol{w}}$$
$$+ O\left(\underbrace{|\beta|}_{\leqslant P^{-1+2\theta_0}} \underbrace{q}_{\leqslant P^{2\theta_0}} P_2 P_3 \left(\frac{P_1}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1} \right)$$
$$+ O\left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^{n} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1} \right).$$

En effectuant un changement de variables

$$\boldsymbol{u} = qP_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{v} = qP_2^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}},\ \boldsymbol{w} = qP_3^{-1}\tilde{\boldsymbol{w}},$$

dans l'intégrale, puis en remplaçant par l'expression de S_3 obtenue dans (2.26), on trouve le résultat souhaité. □

En regroupant les lemmes 2.2.8 et 2.2.9, on obtient :

$$N(P_1, P_2, P_3) = P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} \sum_{1 \leqslant q \ll P^{2\theta_0}} q^{-3n-3}$$
$$\sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q} \int_{|\beta| \leqslant P^{-1+2\theta_0}} I(P\beta) d\beta$$
$$+ O\left(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{4\theta_0} P_1^{-1} \operatorname{Vol}\left(\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)\right)\right)$$
$$+ O(P_1^{n+1} P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-1-\delta}).$$

Or, on a que

$$\operatorname{Vol}\left(\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)\right) \ll \sum_{q \ll P^{2\theta_0}} qP^{-1+2\theta_0} \ll P^{-1+6\theta_0}.$$

Par conséquent, si 'on pose :

$$\mathfrak{S}(P^{2\theta_0}) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant P^{2\theta_0}} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}, \tag{2.27}$$

et

$$J(P^{2\theta_0}) = \int_{|\beta| \leqslant P^{2\theta_0}} I(\beta) d\beta = P \int_{|\beta| \leqslant P^{-1+2\theta_0}} I(P\beta) d\beta \tag{2.28}$$

on a alors :

$$N(P_1,P_2,P_3)=P_1^nP_2^nP_3^n\mathfrak{S}(P^{2\theta_0})J(P^{2\theta_0})+O\left(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-1+10\theta_0}P_1^{-1}\right)$$
$$++O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-1-\delta}).$$

Or,

$$\begin{aligned}P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-1+10\theta_0}P_1^{-1}&=P_1^nP_2^nP_3^nP^{10\theta_0-\frac{1}{1+b+b'}}\\&\leqslant P_1^nP_2^nP_3^nP^{-\delta}\end{aligned}$$

car on a supposé $10\theta_0+\delta<(1+b+b')^{-1}$ (cf 2.23). On définit par la suite

$$\mathfrak{S}=\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3n-3}\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}S_{a,q}, \tag{2.29}$$

et

$$J=\int_{\mathbf{R}}I(\beta)d\beta \tag{2.30}$$

Lemme 2.2.10. *La série $\mathfrak{S}$ est absolument convergente, et on a, pour Q assez grand :*

$$|\mathfrak{S}-\mathfrak{S}(Q)|\ll Q^{-\frac{n}{2}+2}.$$

Démonstration. Fixons $q>Q$. Nous allons appliquer les lemmes précédents avec $P_1=P_2=P_3=q$. On définit un élément $\theta\in[0,1]$ par $6\theta=1-\varepsilon$ (pour un $\varepsilon>0$ fixé). On remarque que pour $\alpha=\frac{a}{q}$, alors α n'appartient à aucun arc majeur $\mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$. En effet, si on avait $\frac{a}{q}\in\mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$, alors on aurait

$$q'\ll P^{2\theta}=(P_1P_2P_3)^{2\theta}=q^{6\theta}=q^{1-\epsilon}<q$$

et par ailleurs

$$1\leqslant|q'a-a'q|<qq'P^{-1+2\theta}<q^{-1+6\theta}=q^{-\epsilon},$$

ce qui est absurde pour q assez grand. On a alors (d'après le lemme 2.2.6) :

$$\begin{aligned}|S(\alpha)|=|S_{a,q}|&\ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K\theta+\varepsilon}\\&=q^{3n+3}q^{-3K\theta+3\varepsilon}\\&\ll q^{3n+3}q^{-K/2+\varepsilon'}=q^{3n+3}q^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon''}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{S} - \mathfrak{S}(Q)| &= \left| \sum_{q>Q} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q} \right| \\
&\ll \sum_{q>Q} q^{-3n-3} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q}| \\
&\ll \sum_{q>Q} q^{-\frac{n+1}{2}+1+\varepsilon''} \ll Q^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+\varepsilon''}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.11. *L'intégrale J est absolument convergente et on a de plus, pour ϕ assez grand :*

$$|J - J(\phi)| \ll \phi^{-1}.$$

Démonstration. Nous allons appliquer les lemmes de la section 2.2.2 avec $\theta = \theta_0$ et P tel que $P^{2\theta_0} = \beta$. On a alors pour tout β que $P^{-1}\beta \in \mathfrak{M}'_{0,1}(\theta_0)$. Le lemme 2.2.9 donne alors :

$$S(P^{-1}\beta) = P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}I(\beta) + O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{4\theta_0}P_1^{-1}). \tag{2.31}$$

De plus, étant donné que $P^{-1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}'_{0,1}(\theta_0)$ (car $P^{-1}\beta = P^{-1+2\theta_0}$), donc au bord de $\mathfrak{M}'(\theta_0)$, le lemme 2.2.6 donne :

$$|S(P^{-1}\beta)| \ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K\theta_0+\varepsilon}.$$

Par conséquent l'équation (2.31) donne :

$$\begin{aligned}
P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}I(\beta) + O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{4\theta_0}P_1^{-1}) \\
= O(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K\theta_0+\varepsilon}),
\end{aligned}$$

donc

$$I(\beta) = O(P^{-K\theta_0+\varepsilon} + P^{4\theta_0}P_1^{-1}) = O(P^{-K\theta_0+\varepsilon} + P^{4\theta_0-\frac{1}{1+b+b'}}).$$

Or, on a par ailleurs :

$$P^{4\theta_0-\frac{1}{1+b+b'}} < P^{-6\theta_0-\delta} \ll \beta^{-3-\delta'} \ll \beta^{-3},$$

(voir (2.23)) ainsi que

$$P^{-K\theta_0+\varepsilon} \ll P^{-4\theta_0-2\delta} \ll \beta^{-2},$$

(cf. (2.21)). On a ainsi $|I(\beta)| \ll \beta^{-2}$, et donc finalement :

$$|J - J(\phi)| \ll \int_{|\beta|>\phi} |I(\beta)| d\beta \ll \phi^{-1}.$$

□

On a donc établi le résultat suivant :

Proposition 2.2.12. *On suppose* $n \geqslant 4$ *et* $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$, $P_2 = P_1^b$, $P_3 = P_1^{b'}$. *Pour* $(n+1) > b' + b + 1$, *si* $\sigma = \mathfrak{S}J$, *on a alors :*

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^n P_3^n P^{-\delta}),$$

(avec $P = P_1 P_2 P_3$ *et* $\delta > 0$ *assez petit).*

2.3 Deuxième étape

Pour cette partie, nous introduisons les notations suivantes. On fixe un élément $\lambda \in \mathbf{N}^*$. Pour cet entier, on note

$$\mathcal{A}_{1,\lambda} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* < \lambda,\ \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* < \lambda\}, \tag{2.32}$$

où l'on a noté :

$$V_{3,\boldsymbol{x}}^* = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, ..., n\},\ B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\right\}, \tag{2.33}$$

$$V_{2,\boldsymbol{x}}^* = \left\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, ..., n\},\ B_j'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0\right\}, \tag{2.34}$$

et on pose, par abus de langage :

$$\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{1,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1}. \tag{2.35}$$

On définit de même

$$\mathcal{A}_{2,\lambda} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{1,\boldsymbol{y}}^* < \lambda,\ \dim V_{3,\boldsymbol{y}}^* < \lambda\}, \tag{2.36}$$

avec :

$$V_{3,\boldsymbol{y}}^* = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall k \in \{0, ..., n\},\ B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\right\}, \tag{2.37}$$

$$V_{1,\boldsymbol{y}}^* = \left\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, ..., n\},\ B_i''(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\right\}, \tag{2.38}$$

$$\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{2,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1}, \tag{2.39}$$

et

$$\mathcal{A}_{3,\lambda} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \dim V_{1,\boldsymbol{z}}^* < \lambda,\ \dim V_{2,\boldsymbol{z}}^* < \lambda\}, \tag{2.40}$$

avec :

$$V_{1,\boldsymbol{z}}^* = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall i \in \{0, ..., n\},\ B_i''(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\right\}, \tag{2.41}$$

$$V_{2,\boldsymbol{z}}^* = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \forall j \in \{0, ..., n\},\ B_j'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0\right\}, \tag{2.42}$$

$$\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_{3,\lambda} \cap \mathbf{Z}^{n+1}. \tag{2.43}$$

Dans ce qui va suivre nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *On a la majoration*

$$\mathrm{card}\{\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1} \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c\} \ll P_1^{n+1-\lambda}.$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{A}_{1,\lambda}^c$ *des vecteurs* $\boldsymbol{x}$ *tels que* $\dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda$ *ou* $\dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda$ *est un fermé de Zariski de* $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$.

Démonstration. On commence par montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$ est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$. On aura alors de la même manière que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$ est un fermé, et donc que $\mathcal{A}_{1,\lambda}^c$ est un fermé de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$.

Notons Y le fermé de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ défini par :

$$Y = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n \mid \forall k \in \{0, ..., n\},\ B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}.$$

La projection canonique

$$\pi : Y \subset \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n \to \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1},$$

est un morphisme projectif, donc fermé. Par conséquent, d'après [G-D, Corollaire 13.1.5],

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim Y_{\boldsymbol{x}} \geqslant \lambda - 1\}$$

est un fermé, et puisque $\dim Y_{\boldsymbol{x}} = \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* - 1$, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$$

est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}$.

Nous allons à présent montrer que $\dim \mathcal{A}_{1,\lambda}^c \leqslant n + 1 - \lambda$. Pour cela, nous allons montrer que la dimension de

$$\mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1} \mid \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$$

est inférieure à $n + 1 - \lambda$. On remarque que

$$Y \cap (\mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n) = \bigsqcup_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c} \pi^{-1}(\boldsymbol{x}).$$

On a alors

$$\dim \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c + \lambda - 1 \leqslant \dim Y = \dim V_3^* - 1 = n,$$

ce qui implique

$$\dim \mathcal{A}_{1,\lambda,3}^c \leqslant n + 1 - \lambda.$$

Ainsi, $\dim \mathcal{A}_{1,\lambda}^c \leqslant n + 1 - \lambda$, et donc

$$\mathrm{card}\{\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1]^{n+1} \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c\} \ll P_1^{n+1-\lambda}$$

(cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]) □

Remarque 2.3.2. *Ce résultat prouve en outre que l'ouvert $\mathcal{A}_{1,\lambda}$ est non vide pour $\lambda > 0$.*

On déduit en particulier de ce lemme que les ensembles $\mathcal{A}_{i,\lambda}$ sont des ouverts de Zariski. On notera dorénavant U l'ouvert de V :

$$(2.44)\quad U = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathcal{A}_{1,\lambda}\times\mathcal{A}_{2,\lambda}\times\mathcal{A}_{3,\lambda} \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0, \\ \max_j |B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})| \neq 0,\ \max_i |B''_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})| \neq 0 \text{ et } F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}.$$

Notre objectif est d'établir, pour cet ouvert U, une formule asymptotique pour $N_U(B)$ (avec les notations de (2.1)) pour un choix du paramètre λ que nous préciserons ultérieurement. À cette fin, nous allons chercher à donner une formule asymptotique pour

$$(2.45)\\ N_U(P_1,P_2,P_3) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1)\times(\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times(\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0,\ \max_j |B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})| \neq 0, \\ \max_i |B''_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})| \neq 0 \text{ et } F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} \\ = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U\cap(P_1\mathcal{B}_1\times P_2\mathcal{B}_2\times P_3\mathcal{B}_3)\cap\mathbf{Z}^{3n+3}\}.$$

Pour $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$, par des méthodes analogues à celles développées dans la section précédente, nous allons d'abord établir une formule asymptotique pour

$$(2.46)\\ N_1(P_1,P_2,P_3) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1)\times(\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times(\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0 \text{ et } F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}.$$

Ce qui nous permettra d'établir une formule asymptotique pour $N_U(P_1,P_2,P_3)$ pour le cas où $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$ (par symétrie on en déduira la même formule pour les autres cas).

2.3.1 Sommes d'exponentielles

Pour tout ce qui va suivre, on fixe $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$. On pose

$$(2.47)\quad N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2)\times(\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0 \text{ et } F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}.$$

On a alors

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = \int_0^1 S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)d\alpha,$$

pour

$$S_{\boldsymbol{x}}(\alpha) = \sum_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \sum_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_3\mathcal{B}_3} e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{2.48}$$

Nous allons donc, dans un premier temps, chercher une formule asymptotique pour $S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)$. Pour tous réels strictement positifs, H_1, H_2 on notera

$$M_{\boldsymbol{x}}^2(H_1,H_2) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{z}| \leqslant H_1,\ \forall j\in\{0,...,n\}\ ||\alpha B_j'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})|| < H_2\},$$

$$M_{\boldsymbol{x}}^3(H_1,H_2) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant H_1,\ \forall k\in\{0,...,n\}\ ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|| < H_2\}.$$

Remarquons avant tout que l'on a

$$|S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll \sum_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \prod_{k=0}^{n} \min\{P_3, ||\alpha B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})||^{-1}\}.$$

À partir de là, on montre comme dans la section 2.2.1 que :

$$|S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| \leqslant M_{\boldsymbol{x}}^3(P_2, P_3^{-1})P_3^{n+1}\log(P_3)^{n+1},$$

On établit alors le lemme ci-dessous :

Lemme 2.3.3. *Soit $P>0$, $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, $\theta_2\in[0,1]$, et $\kappa>0$. L'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| \leqslant P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-\kappa+\varepsilon}$,
2. $\max_{i\in\{2,3\}} M_{\boldsymbol{x}}^i(P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}) \gg P_2^{(n+1)\theta_2}P^{-\kappa}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser à nouveau le lemme 2.2.2, avec

$$(\lambda_{k,j})_{k,j} = \left(\alpha\sum_{i=0}^{n}\alpha_{i,j,k}x_i\right)_{k,j},$$

$$aZ_2 = P_2,\ a^{-1}Z_2 = P_3^{-1},\ aZ_1 = P_2^{\theta_2},\ a^{-1}Z_1 = P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},$$

et on obtient immédiatement le résultat, comme dans la section 2.2.2. □

On considère un élément $\boldsymbol{y}\in M_{\boldsymbol{x}}^3(P_2^{\theta_2}, P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1})$. Supposons qu'il existe un certain $k_0\in\{0,...,n\}$ tel que $B_{k_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$. On note alors $q = |B_{k_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \geqslant 1$ et on pose $\alpha|B_{k_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| = a+\delta$, avec $a\in\mathbf{Z}$ et $|\delta| < P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}$. On a donc

$$|q\alpha - a| < P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},\ \ |q| \ll |\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}.$$

Quitte à changer θ_2, on peut supposer

$$|q\alpha - a| < \frac{1}{2}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1},\ \ |q| \leqslant |\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}.$$

D'où le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Soient $P, \varepsilon, \kappa > 0$ et $\theta_2 \in [0,1]$ fixés. Il existe une constante C_1 telle que l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. $|S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| \leqslant P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-\kappa+\varepsilon}$,
2. *Il existe des entiers a, q tels que $1 \leqslant q \leqslant |\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}$ et* $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$, $2|q\alpha - a| \leqslant P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}$;
3. *On a*
$$\mathrm{card}\{\boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant P_2^{\theta_2},\ \forall k \in \{0,...,n\}\ B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\} \geqslant C_1 P_2^{(n+1)\theta_2}P^{-\kappa}.$$
4. *On a*
$$\mathrm{card}\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2^{\theta_2},\ \forall j \in \{0,...,n\}\ B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\} \geqslant C_1 P_2^{(n+1)\theta_2}P^{-\kappa}.$$

On choisit à présent $P = P_2P_3$ et soit θ tel que $P_2^{\theta_2} = P^{\theta}$. On a alors $P_2^{(n+1)\theta_2}P^{-\kappa} = P^{(n+1)\theta-\kappa}$. Par conséquent, les conditions 3 et 4 impliquent respectivement que $P^{\theta \dim V_{3,\boldsymbol{x}}^*} \gg P^{\theta((n+1)-\frac{\kappa}{\theta})}$ et $P^{\theta \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^*} \gg P^{\theta((n+1)-\frac{\kappa}{\theta})}$ (cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]). On pose à présent $K_1 = (n+1)-\lambda$ et on choisit $\kappa = K_1\theta$. On a par ailleurs, puisque $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$, $\dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* \leqslant \lambda - 1$ et $\dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* \leqslant \lambda - 1$. Par conséquent, si les conditions 3 ou 4 sont vraies, alors il existe une constante C_2 telle que :

$$C_1 P^{\theta(n+1)-K_1\theta} < C_2 P^{\theta(\lambda-1)},$$

ce qui équivaut à dire que :

$$P^{\theta} < C_2/C_1.$$

D'où le résultat ci-dessous :

Lemme 2.3.5. *Il existe une constante C_3 telle que, si $0 < \theta \leqslant 1$ et $P^{\theta} \geqslant C_3$, alors au moins l'une des assertions ci-dessous est vraie :*

1. $|S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| \leqslant P_2^{n+1}P_3^{n+1}P^{-K_1\theta+\varepsilon}$,
2. *Il existe des entiers a, q tels que $1 \leqslant q \leqslant |\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}$ et* $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$, $2|q\alpha - a| \leqslant P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}$.

2.3.2 La méthode du cercle

Pour des entiers a, q tels que $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$, $|q| \leqslant |\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}$, on définit les arcs majeurs :

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{\boldsymbol{x}}(\theta) = \{\alpha \in [0,1] \mid 2|q\alpha - a| \leqslant P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\}, \tag{2.49}$$

$$\mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta) = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant |\boldsymbol{x}| P_2^{\theta_2}} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta), \tag{2.50}$$

$$\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta) = \{\alpha \in [0,1] \mid 2|q\alpha - a| \leqslant q P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1}\}, \tag{2.51}$$

$$\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}(\theta) = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant |\boldsymbol{x}| P_2^{\theta_2}} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta). \tag{2.52}$$

Lemme 2.3.6. *Si l'on suppose $|\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} < 1$ alors les arcs majeurs $\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a',q'}(\theta)$, avec a, q, a', q' vérifiant les hypothèses mentionnées précédemment. On a alors :

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leqslant P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1},$$

et ceci implique

$$1 \leqslant qq' P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1} \leqslant |\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1}$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme. □

A partir d'ici, on supposera $P^\theta > C_3$, et on supposera que l'on a bien $|\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} < 1$. On suppose de plus que $K_1 > 2$. On définit par ailleurs : $\phi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| P_2^{\theta_2} = |\boldsymbol{x}| P^\theta$, et $\Delta(\theta, K_1) = \theta(K_1 - 2) > 0$.

Lemme 2.3.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a la formule asymptotique :*

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2, P_3) = \sum_{q \leqslant \phi(\boldsymbol{x})} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)} S_{\boldsymbol{x}}(\alpha) d\alpha + O\left(|\boldsymbol{x}| P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon} \right).$$

Démonstration. On a

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2, P_3) = \sum_{q \leqslant \phi(\boldsymbol{x})} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)} S_{\boldsymbol{x}}(\alpha) d\alpha + O\left(\mathcal{E}(\boldsymbol{x})\right),$$

avec $\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta)} |S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha$. Remarquons que l'on a

$$\mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta)\right) \ll \sum_{q \leqslant \phi(\boldsymbol{x})} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} P_2^{-1+\theta_2} P_3^{-1} \ll |\boldsymbol{x}| P_2^{-1+2\theta_2} P_3^{-1}.$$

On choisit une suite de réels $0 < \theta = \theta'_0 < \theta'_1 < ... < \theta'_T = \frac{1}{2}$, avec $2(\theta'_{i+1} - \theta'_i) < \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$. De plus, ε étant fixé, on peut supposer $T \ll P^\varepsilon$. On a alors que

$$\begin{aligned}\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta'_T)} |S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll P_2^{n+1+\varepsilon} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-K_1\theta'_T} \\ &\ll P_2^{n+1-K_1\theta'_T+\varepsilon} P_3^{n+1-K_1\theta'_T+\varepsilon} \\ &\ll P_2^{n-\Delta(\theta'_T,K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta'_T,K_1)+\varepsilon} \\ &\ll P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}.\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta'_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta'_i)} |S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll \mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta'_{i+1})) P_2^{n+1+\varepsilon} P_3^{n+1+\varepsilon} P^{-K_1\theta'_i} \\ &\ll |\boldsymbol{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{2\theta'_{i+1}-K_1\theta'_i} \\ &= |\boldsymbol{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{2(\theta'_{i+1}-\theta'_i)-(K_1-2)\theta'_i} \\ &\ll |\boldsymbol{x}| P_2^{n+\varepsilon} P_3^{n+\varepsilon} P^{\varepsilon-\Delta(\theta'_i,K_1)} \\ &\ll |\boldsymbol{x}| P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon'} P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon'}\end{aligned}$$

Et on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) \ll &\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta_T)} |S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha \\ &+ \sum_{i=0}^{T} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta_i)} |S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha \ll |\boldsymbol{x}| P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon''} P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon''}.\end{aligned}$$

□

2.3.3 Les arcs majeurs

Dans tout ce qui suit, pour un $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ fixé (avec un λ que nous supposerons inférieur à n), $a, q \in \mathbf{Z}$, $\beta \in \mathbf{R}$, on introduit les notations suivantes :

$$S_{a,q}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{b}^{(1)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \sum_{\boldsymbol{b}^{(2)} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)})\right), \tag{2.53}$$

$$I_{\boldsymbol{x}}(\beta) = \int_{\mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e\left(\beta F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\right) d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{w}. \tag{2.54}$$

Lemme 2.3.8. *Soient $a,q\in\mathbf{Z}$ tels que $1\leqslant q\leqslant|\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2}=|\boldsymbol{x}|P^{\theta}$, $0\leqslant a<q$, $\operatorname{pgcd}(a,q)=1$ et soit $\alpha\in\mathcal{M}_{a,q}'^{\boldsymbol{x}}(\theta)$. On pose alors $\beta=\alpha-\frac{a}{q}$. On a alors que :*

$$S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)=P_2^{n+1}P_3^{n+1}q^{-2n-2}S_{a,q}(\boldsymbol{x})I_{\boldsymbol{x}}(P\beta)+O(|\boldsymbol{x}|^2P_2^{n+2\theta_2}P_3^{n+1}).$$

Démonstration. On commence par écrire

$$\begin{aligned}S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)=&\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2}\sum_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_3\mathcal{B}_3}e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))\\&+\operatorname{card}\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2\mid\forall k\in\{0,...,n\},\ B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\}P_3^{n+1}.\end{aligned}$$

Puisque $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$, on obtient :

$$S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)=\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_2\mathcal{B}_2}\sum_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n+1}\cap P_3\mathcal{B}_3}e(\alpha F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))+O(P_2^{\lambda-1}P_3^{n+1}),$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned}S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)=&\sum_{\boldsymbol{b}^{(1)}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}}\sum_{\boldsymbol{b}^{(2)}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}}e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)})\right)S_3(\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)})\\&+O(P_2^{\lambda-1}P_3^{n+1})\end{aligned}$$

avec

$$S_3(\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)})=\sum_{\substack{q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}^{(1)}\in P_2\mathcal{B}_2\\q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}^{(2)}\in P_3\mathcal{B}_3}}e(\beta F(\boldsymbol{x},q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}^{(1)},q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}^{(2)})).$$

On remarque que, pour $\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}'',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{z}''$ tels que $|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''|\ll1$ et $|\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}''|\ll1$, on a

$$|F(\boldsymbol{x},q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}^{(1)},q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}^{(2)})-F(\boldsymbol{x},q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}^{(1)},q\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{b}^{(2)})|\ll q|\boldsymbol{x}|P_2+q|\boldsymbol{x}|P_3\ll q|\boldsymbol{x}|P_3$$

On a donc, en remplaçant la série par une intégrale, que

$$\begin{aligned}S_3(\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)})=&\int_{\substack{q\tilde{\boldsymbol{v}}\in P_2\mathcal{B}_2\\q\tilde{\boldsymbol{w}}\in P_3\mathcal{B}_3}}e(\beta F(\boldsymbol{x},q\tilde{\boldsymbol{v}},q\tilde{\boldsymbol{w}}))d\tilde{\boldsymbol{v}}d\tilde{\boldsymbol{w}}\\&+O\left(|\beta||q|\boldsymbol{x}|P_3\left(\frac{P_3}{q}\frac{P_2}{q}\right)^{n+1}+\left(\frac{P_2}{q}\right)^n\left(\frac{P_3}{q}\right)^{n+1}\right)\\&=P_2^{n+1}P_3^{n+1}q^{-2n-2}I_{\boldsymbol{x}}(P\beta)+O\left(q^{-2n-1}|\boldsymbol{x}|P_2^{n+\theta_2}P_3^{n+1}\right),\end{aligned}$$

par changement de variables $\boldsymbol{v}=qP_2^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}}$ et $\boldsymbol{w}=qP_3^{-1}\tilde{\boldsymbol{w}}$. On en déduit finalement :

$$S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)=P_2^{n+1}P_3^{n+1}q^{-2n-2}S_{a,q}(\boldsymbol{x})I_{\boldsymbol{x}}(P\beta)+O(E),$$

avec

$$\begin{aligned}E &= P_2^{\lambda-1}P_3^{n+1} + \sum_{\boldsymbol{b}^{(1)}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}}\ \sum_{\boldsymbol{b}^{(2)}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} q^{-2n-1}|\boldsymbol{x}|P_2^{n+\theta_2}P_3^{n+1}\\ &\ll |\boldsymbol{x}|qP_2^{n+\theta_2}P_3^{n+1} \ll |\boldsymbol{x}|^2P_2^{n+2\theta_2}P_3^{n+1}.\end{aligned}$$

□

À partir d'ici on notera :

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(Q) = \sum_{q\ll Q} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\boldsymbol{x}) \tag{2.55}$$

$$J_{\boldsymbol{x}}(\phi) = \int_{|\beta|\leqslant\phi} I_{\boldsymbol{x}}(\beta)d\beta. \tag{2.56}$$

Lemme 2.3.9. *Si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$, on a, pour tout $\varepsilon>0$:*

$$\begin{aligned}N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) &= P_2^nP_3^n\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(|\boldsymbol{x}|P^{\theta})J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right)\\ &\quad + O(|\boldsymbol{x}|^4P_2^{n-1+5\theta_2}P_3^n + |\boldsymbol{x}|P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Démonstration. On notera $E_1 = |\boldsymbol{x}|P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}$. Par application des lemmes 2.3.7 et 2.3.8, on a :

$$\begin{aligned}N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) &= \sum_{q\leqslant\phi(\boldsymbol{x})}\ \sum_{\substack{1\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)} S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)d\alpha + O(E_1)\\ &= P_2^{n+1}P_3^{n+1}\sum_{q\leqslant\phi(\boldsymbol{x})} q^{-2n-2} \sum_{\substack{1\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\boldsymbol{x})\int_{|\beta|\leqslant\frac{1}{2}P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}} I_{\boldsymbol{x}}(P_2P_3\beta)d\beta\\ &\quad + O(E_1)+O(E_2),\end{aligned}$$

avec $E_2 = \mathrm{Vol}(\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}(\theta))|\boldsymbol{x}|^2P_2^{n+2\theta_2}P_3^{n+1}$. On remarque que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}(\theta)) &\ll \sum_{q\leqslant\phi(\boldsymbol{x})}\ \sum_{\substack{1\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}\\ &\ll P_2^{-1+\theta_2}P_3^{-1}(|\boldsymbol{x}|P_2^{\theta_2})^2\\ &\ll |\boldsymbol{x}|^2P_2^{-1+3\theta_2}P_3^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E_2 \ll |\boldsymbol{x}|^4P_2^{n-1+5\theta_2}P_3^n,$$

d'où le résultat.

□

Lemme 2.3.10. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$. On suppose que l'on a de plus $K_1 > 2$. Alors, l'intégrale $J_{\boldsymbol{x}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\boldsymbol{x}}(\beta) d\beta$ est absolument convergente, et on a :*

$$\left| J_{\boldsymbol{x}} - J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2} P_2^{\theta_2}\right) \right| \ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')}$$

(pour tout $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit), et on a $|J_{\boldsymbol{x}}| \ll 1$.

Démonstration. On considère un réel β tel que $|\beta| > C_3$. On choisit θ', θ'_2 et P_3 tels que $2|\beta| = P^{\theta'} = P_2^{\theta'_2}$ et $P^{-K_1\theta'} = |\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+2\theta'_2}$ (avec $P = P_2 P_3$). Remarquons que cette dernière condition implique :

$$|\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} = P^{(-K_1+1)\theta'} P_3^{-1} < 1$$

et donc la condition du lemme 2.3.6 est satisfaite. On a alors, d'après le lemme 2.3.5, si $P^{\theta'} > C_3$ alors :

$$|S_{\boldsymbol{x}}(P^{-1}\beta)| < P_2^{n+1} P_3^{n+1} P^{-K_1\theta'+\varepsilon},$$

(car $P^{-1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}^{\boldsymbol{x}}(\theta')$). On a par ailleurs, d'après le lemme 2.3.8 appliqué à $(a, q) = (0, 1)$:

$$P^{n+1}|I_{\boldsymbol{x}}(\beta)| \ll |S_{\boldsymbol{x}}(P^{-1}\beta)| + O(|\boldsymbol{x}|^2 P_2^{n+2\theta'_2} P_3^{n+1}).$$

On obtient alors la borne

$$\begin{aligned} I_{\boldsymbol{x}}(\beta) &\ll P^{\varepsilon - K_1\theta'} + |\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+2\theta'_2} \\ &\ll P^{\varepsilon - K_1\theta'} \\ &= |\beta|^{-K_1+\varepsilon/\theta'} \\ &\ll |\beta|^{-K_1+\varepsilon/\theta} = |\beta|^{-K_1+\varepsilon'} \end{aligned}$$

(θ étant fixé). Par conséquent, si $P^{\theta'} > C_3$, on a que

$$\begin{aligned} \left| J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2} P_2^{\theta_2}\right) - J_{\boldsymbol{x}} \right| &\ll \int_{|\beta| > \frac{1}{2} P_2^{\theta_2}} |\beta|^{\varepsilon' - K_1} d\beta \\ &\ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on choisit P_2 petit (de sorte que $\frac{1}{2} P_2^{\theta_2} \asymp C_3$), on obtient $|J_{\boldsymbol{x}}(C_3) - J_{\boldsymbol{x}}| \ll P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon')} \ll 1$, et donc $|J_{\boldsymbol{x}}| \ll 1$ (car $|J_{\boldsymbol{x}}(C_3)| \ll 1$). $\square$

Lemme 2.3.11. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$. On suppose que l'on a $K_1 > 2$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, la série*

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\boldsymbol{x})$$

converge absolument, et on a

$$|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(\phi(\boldsymbol{x})) - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| \ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon)}.$$

On a de plus la borne $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| \ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $S_{a,q}(\boldsymbol{x}) = S_{\boldsymbol{x}}(\alpha)$ pour $P_2 = P_3 = q$ et $\alpha = \frac{a}{q} \in \mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)$. Supposons $\theta' \in [0,1]$ tel que $q^{\theta'} > C_3$, alors, par le lemme 2.3.5, on a :

$$|S_{a,q}(\boldsymbol{x})| < q^{2(n+1)-K_1\theta'+2\varepsilon}$$

ou alors il existe $q', a' \in \mathbf{Z}$ tels que $1 \leqslant q' \leqslant |\boldsymbol{x}|q^{\theta'}$ et $|q'a - a'q| \leqslant q^{-1+\theta'}$. Ce deuxième cas est alors impossible lorsque $q' \neq q$, donc en particulier lorsque $|\boldsymbol{x}|q^{\theta'} < q$. Quitte à supposer q tel que $q > C_3|\boldsymbol{x}|$, on choisit alors θ' tel que $q^{\theta'} = |\boldsymbol{x}|^{-1}q^{-\varepsilon+1}$, et on a alors

$$|S_{a,q}(\boldsymbol{x})| < q^{2(n+1)-K_1\theta'+2\varepsilon} = q^{2(n+1)-K_1+\varepsilon'}|\boldsymbol{x}|^{K_1}.$$

On remarque par ailleurs que pour $P^\theta = P_2^{\theta_2} > C_3$, on a $\phi(\boldsymbol{x}) = P_2^{\theta_2}|\boldsymbol{x}| > C_3|\boldsymbol{x}|$, et donc, par ce qui précède on a l'estimation :

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(\phi(\boldsymbol{x})) - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| &\ll \sum_{q > \phi(\boldsymbol{x})} q^{-2n-2} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q}(\boldsymbol{x})| \\
&\ll \sum_{q > \phi(\boldsymbol{x})} q^{1-K_1+\varepsilon'}|\boldsymbol{x}|^{K_1} \\
&\ll P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon')}|\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon'}.
\end{aligned}$$

Par le même calcul, on trouve : $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(C_3|\boldsymbol{x}|) - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| \ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon'}$ et en utilisant l'estimation triviale $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(C_3|\boldsymbol{x}|)| \ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon'}$ (obtenue en majorant trivialement $S_{a,q}(\boldsymbol{x})$ par q^{2n+2}), on a alors $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| \ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon'}$. □

Lemme 2.3.12. *Soit* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$. *On suppose que l'on a* $0 < \theta \leqslant 1$ *et* $P_2 \geqslant 1$ *tel que* $P_2^{\theta_2} > C_3$ *et tel que* $|\boldsymbol{x}|^2 P_2^{-1+3\theta_2} P_3^{-1} < 1$. *On suppose de plus que* $K_1 > 2$. *Pour un* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit, on a la formule suivante :*

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2, P_3) = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} P_2^n P_3^n + O(E_2(\boldsymbol{x})) + O(E_3(\boldsymbol{x})),$$

avec

$$E_2(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-(1-5\theta_2)} P_3^n,$$

$$E_3(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon} P_3^n.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.3.9 on a

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = P_2^n P_3^n \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(\phi(\boldsymbol{x})) J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right) + O(E_1) + O(E_2),$$

avec $E_1 = |\boldsymbol{x}| P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon} P_3^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}$. On a donc $E_1 \ll E_3$. De plus, par les lemmes 2.3.10 et 2.3.11 :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(\phi(\boldsymbol{x})) J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right)\right| \\
&\ll |\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}(\phi(\boldsymbol{x}))| \left| J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right)\right| + |\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}| \left| J_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}P_2^{\theta_2}\right) - J_{\boldsymbol{x}}\right| \\
&\ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1+\varepsilon)} + P_2^{\theta_2(1-K_1+\varepsilon)} |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} \\
&\ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{\theta_2(2-K_1)+\varepsilon} \\
&\ll |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{-\Delta(\theta_2,K_1)+\varepsilon} \leqslant |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} P_2^{-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon},
\end{aligned}$$

(rappelons que $\theta(1+\frac{b'}{b}) = \theta_2$, donc $\theta \leqslant \theta_2$ et $\Delta(\theta,K_1) \leqslant \Delta(\theta_2,K_1)$). D'où le résultat. □

Pour $\theta_2 < \frac{1}{5}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$E_2(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-(1-5\theta_2)} P_3^n \ll |\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n.$$

On a donc en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.13. *Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ et si $K_1 > 2$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} P_2^n P_3^n + O(|\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$

uniformément pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| < (P_2^{1-3\theta_2} P_3)^{\frac{1}{2}}$ (pour un $\theta_2 < \frac{1}{5}$ fixé).

On pose pour tout $\delta > 0$:

$$g_1(b,b',\delta) = \left(1+\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{5}{b}-\delta\right)^{-1} 5\left(\frac{3}{b}+2\delta\right). \tag{2.57}$$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.3.14. *Soit $\delta > 0$. On suppose que l'on a $\frac{5}{b} + \delta < 1$ (où $P_2 = P_1^b$). De plus, si $K_1 = n+1-\lambda$ vérifie :*

$$K_1 - 2 > g_1(b,b',\delta),$$

et si $P_2^{\frac{1-\delta-5/b}{5}} > C_3$ alors :

$$N_1(P_1,P_2,P_3) = P_2^n P_3^n \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n).$$

Démonstration. Par définition de $N_1(P_1,P_2,P_3)$ (voir (2.46)), on a

$$N_1(P_1,P_2,P_3) = \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3).$$

Donc pour θ,θ_2 satisfaisant les hypothèses du lemme 2.3.12, on a :

$$N_1(P_1,P_2,P_3) = P_2^nP_3^n \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}J_{\boldsymbol{x}} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &= \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} E_2(\boldsymbol{x}) \\
&= P_2^{n-1+5\theta_2}P_3^n \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} |\boldsymbol{x}|^4 \\
&\ll P_1^{n+5}P_2^{n-1+5\theta_2}P_3^n \\
&= P_1^nP_2^nP_3^nP_2^{-1+5\theta_2+5/b},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} E_3(\boldsymbol{x}) \\
&= P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+\varepsilon}P_3^n \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} |\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon} \\
&\ll P_1^{n+3}P_2^{n-\Delta(\theta,K_1)+2\varepsilon}P_3^n \\
&= P_1^nP_2^nP_3^nP_2^{3/b-\Delta(\theta,K_1)+2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On choisit ensuite θ_2 tel que $-1+5\theta_2+5/b=-\delta$ (ce qui est possible, car on a $5/b+\delta<1$, par hypothèse) et donc $\theta_2=(1-5/b-\delta)/5$. L'hypothèse $K_1-2>g_1(b,b',\delta)$ implique

$$\begin{aligned}
K_1-2 &> \left(1+\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{5}{b}-\delta\right)^{-1}5\left(\frac{3}{b}+2\delta\right) \\
&= \left(1+\frac{b'}{b}\right)\theta_2^{-1}\left(\frac{3}{b}+2\delta\right) \\
&= \theta^{-1}\left(\frac{3}{b}+2\delta\right)
\end{aligned}$$

(car $\theta_2=\theta(1+\frac{b'}{b})$). On a alors

$$\Delta(\theta,K_1)=\theta(K_1-2)>\left(\frac{3}{b}+2\delta\right).$$

On en déduit :

$$3/b - \Delta(\theta, K_1) + 2\varepsilon < -2\delta + 2\varepsilon < -\delta$$

(pour ε assez petit). On a donc démontré la proposition pour $P_2^{\theta_2} = P_2^{\frac{1-\delta-5/b}{5}} > C_3$. □

2.4 Troisième étape

Dans cette section nous allons utiliser les résultats obtenus dans les deux sections précédentes pour établir la formule (2.8) pour b, b' vérifiant $b' \leqslant b + 1 + \nu$ (avec $\nu > 0$ arbitrairement petit).
On notera b_1 le réel strictement supérieur à 5 minimisant la fonction $g_1(b, b+1+\nu, \delta) + (b + (b+1+\nu) + 1 + \delta) + 2$, pour $\delta, \nu > 0$ fixés et arbitrairement petits.

Remarque 2.4.1. *On peut en fait vérifier que $b_1 \in [8, 9]$, pour δ, ν assez petits, et que le minimum obtenu est strictement inférieur à* 29.

On pose $b_1' = b_1 + 1 + \nu$. On supposera dorénavant que

$$n + 1 > g_1(b_1, b_1', \delta) + (b_1 + b_1' + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b_1' + \delta + 3$$

(ceci est en particulier vrai lorsque $n \geqslant 28$, d'après la remarque précédente).

Lemme 2.4.2. *Si l'on a $n + 1 > g_1(b_1, b_1', \delta) + (b_1 + b_1' + 1 + \delta) + 2$ (en particulier, si $n \geqslant 28$), alors pour tout $P_1 \geqslant 1$:*

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} = \sigma P_1^n + O(P_1^{n-\delta}).$$

Démonstration. Si $P_1 > 1$ est fixé quelconque et si l'on pose $P_2 = P_1^{b_1}$, $P_3 = P_1^{b_1'}$, alors par la proposition 2.2.12, on a :

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^{n-\delta} P_3^{n-\delta}). \tag{2.58}$$

On remarque d'autre part que

$$N(P_1, P_2, P_3) = N_1(P_1, P_2, P_3) + O\left(\sum_{\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})^c} P_2^{n+1} P_3^{n+1}\right) \tag{2.59}$$

$$= N_1(P_1, P_2, P_3) + O\left(P_1^{n+1-\lambda} P_2^{n+1} P_3^{n+1}\right) \tag{2.60}$$

(d'après le lemme 2.3.1). A partir d'ici nous fixerons $\lambda = \lceil b_1 + b_1' + 1 + \delta \rceil$, de sorte que :

$$P_1^{n+1-\lambda} P_2^{n+1} P_3^{n+1} \ll P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n.$$

Enfin, puisque $n+1 > g_1(b_1, b_1', \delta) + \lambda + 2$ (i.e. $K_1 - 2 > g_1(b_1, b_1', \delta)$), la proposition 2.3.14 donne

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = P_2^n P_3^n \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n). \tag{2.61}$$

Ainsi, en regroupant les formules (2.58), (2.59) et (2.61), on trouve :

$$P_2^n P_3^n \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n),$$

et donc

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} = \sigma P_1^n + O(P_1^{n-\delta}),$$

et cette relation est indépendante de P_2, P_3. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.3. *On suppose que l'on a* $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$, $P_2 = P_1^b$ *et* $P_3 = P_1^{b'}$. *On suppose de plus que* $b' \leqslant b + 1 + \nu$ *et que*

$$n + 1 > g_1(b_1, b_1', \delta) + (b_1 + b_1' + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b_1' + \delta$$

($\delta, \nu > 0$ étant fixés et arbitrairement petits). On a alors que

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

Démonstration. – Premier cas : on suppose $b_1 \leqslant b$. On a puisque $b' \leqslant b + 1 + \nu$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b'}{b} &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{b} + \frac{\nu}{b} \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{b_1} + \frac{\nu}{b_1} \\ &= 1 + \frac{b_1 + 1 + \nu}{b_1} \\ &= 1 + \frac{b_1'}{b_1}. \end{aligned}$$

On a également

$$\left(1 - \frac{5}{b} - \delta\right)^{-1} \leqslant \left(1 - \frac{5}{b_1} - \delta\right)^{-1}$$

(en effet, puisque $b_1 \leqslant b$ et $b_1 \in [8, 9]$, on a $\frac{5}{b} + \delta \leqslant \frac{5}{b_1} + \delta < 1$) et

$$\left(\frac{3}{b} + 2\delta\right) \leqslant \left(\frac{3}{b_1} + 2\delta\right).$$

Ceci implique

$$g_1(b, b', \delta) \leqslant g_1(b_1, b_1', \delta) < K_1 - 2.$$

Ainsi, par la proposition 2.3.14, on obtient

$$\begin{aligned} N_1(P_1, P_2, P_3) &= P_2^n P_3^n \sum_{\boldsymbol{x} \in P_1\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n) \\ &= \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n) \end{aligned}$$

(d'après le lemme 2.4.2).

Deuxième cas : supposons $b_1 > b$. On a alors

$$b' \leqslant 1 + b + \nu < 1 + b_1 + \nu = b_1',$$

donc

$$b' + b + 1 \leqslant b_1' + b_1 + 1 < n + 1$$

et on peut alors appliquer la proposition 2.2.12, et on a :

$$N(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^{n-\delta} P_3^{n-\delta}).$$

Par conséquent, en utilisant (2.59), puisque $\lambda = \lceil b_1 + b_1' + 1 + \delta \rceil \geqslant \lceil b + b' + 1 + \delta \rceil$, on trouve bien

$$N_1(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^n P_2^{n-\delta} P_3^n).$$

□

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.4.4. *On suppose que l'on a $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$, $P_2 = P_1^b$ et $P_3 = P_1^{b'}$. On suppose de plus que $b' \leqslant b + 1 + \nu$ et que*

$$n + 1 > g_1(b_1, b_1', \delta) + (b_1 + b_1' + 1 + \delta) + 2 > b_1 + b_1' + \delta$$

($\delta, \nu > 0$ étant fixés et arbitrairement petits). On a alors que

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n).$$

Démonstration. Rappelons que, par définition :

$$\begin{aligned} N_U(P_1, P_2, P_3) = \operatorname{card}\{&(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ &\times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \neq 0,\ \max_j |B_j'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})| \neq 0, \\ &\max_i |B_i''(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})| \neq 0,\ F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = N_1(P_1, P_2, P_3) + O(T_1) + O(T_2) + O(T_3) + O(T_4),$$

où

$$T_1 = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}, \tag{2.62}$$

$$T_2 = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}, \tag{2.63}$$

$$T_3 = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid B_j'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0 \ \forall j\}, \tag{2.64}$$

$$T_4 = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid B_i''(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0 \ \forall i\}. \tag{2.65}$$

On remarque que, d'après le lemme 2.3.1

$$T_1 \ll P_1^{n+1}P_2^{n+1-\lambda}P_3^{n+1} = P_1^{n+1+b'-(\lambda-1)b}P_2^nP_3^n.$$

Or, on a fixé $\lambda = \lceil b_1 + b_1' + 1 + \delta \rceil$, avec $5 < b_1 \leqslant b_1'$, on a donc clairement $n+1+b'-(\lambda-1)b \leqslant n+1+b'-5b \leqslant n-1$ puisque $b' \leqslant b+1+\nu$ et $b \geqslant 1$. On a donc $T_1 \ll P_1^{n-1}P_2^nP_3^n$. De la même manière, on montre que $T_2 \ll P_1^{n-1}P_2^nP_3^n$.

Par ailleurs, pour $\boldsymbol{x}$ fixé, si $B_j'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0$ pour tout j, alors $\boldsymbol{z} \in V_{3,\boldsymbol{x}}^*$. Par conséquent, puisque pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$, $\dim V_{3,\boldsymbol{x}}^* < \lambda$, on a alors :

$$T_3 \ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{\lambda} = P_1^{n-1}P_2^nP_3^n,$$

car $n+1 > \lambda+3$ (car $n+1 > g_1(b_1,b_1',\delta)+(b_1+b_1'+1+\delta)+2$, $g_1(b_1,b_1',\delta) \geqslant 2$ et $(b_1+b_1'+1+\delta)+2 \geqslant \lambda+1$ par hypothèse). De même on montre que $T_4 \ll P_1^{n-1}P_2^nP_3^n$. En résumé on a donc

$$N_U(P_1,P_2,P_3) = N_1(P_1,P_2,P_3) + O(P_1^{n-1}P_2^nP_3^n),$$

et la proposition 2.4.3 permet de conclure.

□

2.5 Quatrième étape

Il nous reste donc à traiter le cas où $b' \geqslant b+1+\nu$ (i.e. $P_3 \geqslant P_1^{1+\nu}P_2$). Nous allons résoudre ce problème en utilisant des résultats de géométrie des réseaux.

Commençons par introduire la définition suivante (issue de [Wi, Definition 2.1]) :

Définition 2.5.1. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{R}^d$, et soit c un entier tel que $0 \leqslant c \leqslant d$. Pour $M \in \mathbf{N}$ et $L > 0$, on dit que S* appartient à $\mathrm{Lip}(d, c, M, L)$ *s'il existe M applications $\phi : [0,1]^{d-c} \to \mathbf{R}^d$ vérifiant :*

$$||\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})||_2 \leqslant L||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2,$$

$||.||_2$ désignant la norme euclidienne, telles que S soit recouvert par les images de ces applications.

On a le résultat suivant (cf. [M-V, Lemme 2]) :

Lemme 2.5.2. *Soit $S \subset \mathbf{R}^d$ un ensemble bordé dont le bord ∂S appartient à $\mathrm{Lip}(d, 1, M, L)$. L'ensemble S est alors mesurable et si Λ est un réseau de $\mathbf{R}^d$ de premier minimum successif λ_1, on a*

$$\left|\mathrm{card}(S \cap \Lambda) - \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\det(\Lambda)}\right| \leqslant c(d)M\left(\frac{L}{\lambda_1} + 1\right)^{d-1},$$

où $c(d)$ est une constante ne dépendant que de d.

Pour un couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}$ fixé tel que $\max_k |B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \neq 0$, on note $H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ l'hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$ donné par

$$H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{n} B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) z_k = 0\}.$$

On note par ailleurs $C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ le corps convexe $\mathcal{B}_3 \cap H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ et $\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ le réseau $\mathbf{Z}^{n+1} \cap H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$. Nous allons appliquer le lemme 2.5.2 à $S = P_3 C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ et $\Lambda = \Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ vus respectivement comme un sous-ensemble et un réseau de $H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ que l'on identifiera à $\mathbf{R}^n$. Remarquons dans un premier temps que $\partial\mathcal{B}_3 \in \mathrm{Lip}(n+1, 1, 2n, 2)$: en effet, pour toute face F du cube $\mathcal{B}_3$, on peut construire une application $\phi_F : [0,1]^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ qui est $2-$lipschitzienne et telle que $\phi_F([0,1]^n) = F$. Considérons par exemple la face F correspondant aux points $\boldsymbol{z} \in \mathcal{B}_3$ tels que $z_0 = 1$. On pose alors $\phi_F(t_1, ..., t_n) = (1, 2t_1 - 1, ..., 2t_n - 1)$ et on a bien $\phi_F([0,1]^n) = F$ et pour tous $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}' \in [0,1]^n$

$$||\phi_F(\boldsymbol{t}) - \phi_F(\boldsymbol{t}')||_2 \leqslant 2||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}'||_2.$$

Montrons à présent que $\partial C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Lip}(n, 1, 2n, 2(n-1)\sqrt{n+1})$. Une face du polytope $C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ est obtenue en prenant l'intersection d'une face F de $\mathcal{B}_3$ avec $H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$. Considérons par exemple l'intersection (supposée non vide) de la face $F = \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{B}_3 \mid z_0 = 1\}$ avec $H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$. Pour simplifier les notations, on pose pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\alpha_k = B_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de sorte que $H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ a pour équation $\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n = 0$ (les α_k étant non tous nuls). Pour tout $\boldsymbol{z} \in F \cap H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$, on a alors $\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n = 0$, avec $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\alpha_k| \neq 0$ puisque l'intersection $F \cap H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ est non vide. Supposons, par exemple, que $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k| = |\alpha_n|$, on a alors $z_n = -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{\alpha_n}z_k$, et on peut construire l'application $\tilde{\phi}_F : [0,1]^{n-1} \to H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ définie par

$$\tilde{\phi}_F(t_1,...,t_{n-1}) = \left(1, 2t_1-1, ..., 2t_{n-1}-1, -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{\alpha_n}(2t_k-1)\right).$$

On remarque alors que $F \cap H_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \subset \tilde{\phi}_F([0,1]^{n-1})$ et que

$$\begin{aligned}||\tilde{\phi}_F(\boldsymbol{t}) - \tilde{\phi}_F(\boldsymbol{t}')||_2 &\leqslant \sqrt{n+1}||\tilde{\phi}_F(\boldsymbol{t}) - \tilde{\phi}_F(\boldsymbol{t}')||_\infty \\ &\leqslant \sqrt{n+1}\max\left(2, 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|}\right)||\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}'||_\infty \\ &\leqslant 2(n-1)\sqrt{n+1}||\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}'||_2.\end{aligned}$$

On a donc $\partial C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Lip}(n,1,2n,2(n-1)\sqrt{n+1})$ et par conséquent

$$\partial P_3 C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Lip}(n,1,2n,2(n-1)\sqrt{n+1}P_3).$$

De plus puisque $\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \subset \mathbf{Z}^{n+1}$ le premier minimum successif de ce réseau est supérieur ou égal à 1. Ainsi, si l'on pose

$$N_{\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) = \{\boldsymbol{z} \in P_3\mathcal{B}_3 \cap \mathbf{Z}^{n+1} \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} = \mathrm{card}(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \cap P_3C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) \tag{2.66}$$

le lemme 2.5.2 nous donne :

$$\left|N_{\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) - \frac{\mathrm{Vol}(P_3C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}\right| \ll_n P_3^{n-1}.$$

On a donc que

$$N_{\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) = \frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}P_3^n + O(P_3^{n-1}). \tag{2.67}$$

Par conséquent, si l'on note

$$\begin{aligned}N'(P_1,P_2,P_3) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_1\mathcal{B}_1) \times (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \\ \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0, \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0\},\end{aligned}$$

on trouve

$$N'(P_1,P_2,P_3) = P_3^n \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1 \\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k|B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})} + O\left(\sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in P_1\mathcal{B}_1\times P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k|B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} P_3^{n-1}\right).$$

On peut montrer par ailleurs (voir par exemple [HB, Lemme 1.(i)]) que

$$\det(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) = \frac{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2}{\mathrm{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))}.$$

On a ainsi

$$N'(P_1,P_2,P_3) = P_3^n \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1 \\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \frac{\mathrm{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} + O\left(P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n-1}\right).$$

Par ailleurs, puisque l'on a supposé $b' \geqslant b+1+\nu$, on a

$$P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n-1} \ll P_1^{n-\nu}P_2^nP_3^n.$$

Ainsi, on trouve

$$N'(P_1,P_2,P_3) = P_3^n \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1 \\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \frac{\mathrm{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} + O\left(P_1^{n-\nu}P_2^nP_3^n\right). \tag{2.68}$$

Nous allons à présent montrer que

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1 \\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} \frac{\mathrm{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} = \sigma P_1^nP_2^n + O(P_1^{n-\delta'}P_2^n)$$

pour un certain $\delta' > 0$. On remarque que

$$N'(P_1,P_2,P_3) = N_U(P_1,P_2,P_3) + O(T_5) + O(T_3) + O(T_4)$$

où

$$T_5 = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1)\times(\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})\cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c\cap P_3\mathcal{B}_3) \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}, \tag{2.69}$$

et T_3, T_4 sont définis par (2.64) et (2.65). Nous avons déjà montré que $T_3, T_4 \ll P_1^{n-1}P_2^nP_3^n$. On a par ailleurs que

$$T_5 \ll P_1^{n+1}P_2^{n+1}P_3^{n+1-\lambda} \ll P_1^{n-1}P_2^nP_3^n$$

car $\lambda \geqslant 4$. Par conséquent

$$N'(P_1,P_2,P_3) = N_U(P_1,P_2,P_3) + O(P_1^{n-1}P_2^nP_3^n). \tag{2.70}$$

Par la suite, on choisit P_3 tel que $b' = b+1+\nu$. D'après la proposition 2.4.4, la formule (2.70) donne :

$$N'(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta} P_2^n P_3^n),$$

et en utilisant (2.68), on a alors :

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in P_1\mathcal{B}_1 \times P_2\mathcal{B}_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0}} \frac{\operatorname{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \operatorname{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} = \sigma P_1^n P_2^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n),$$

pour $\delta' = \min\{\delta, \nu\}$, et ceci indépendamment de P_3.

Par conséquent, on déduit de (2.68) que

$$N'(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n)$$

pour tout n tel que $(n+1) > g_1(b_1, b_1', \delta) + (b_1 + b_1' + 1 + \delta) + 2$, et tous (b, b') tels que $b' \geqslant b + 1 + \nu$. Par conséquent, en utilisant la formule (2.70) on a, sous les mêmes hypothèses :

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n).$$

En regroupant ce résultat avec la proposition 2.4.4 on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.5.3. *Si $n \geqslant 28$, alors il existe $\delta' > 0$ tel que, pour tous $P_1, P_2, P_3 \geqslant 1$ vérifiant $P_1 \leqslant P_2 \leqslant P_3$:*

$$N_U(P_1, P_2, P_3) = \sigma P_1^n P_2^n P_3^n + O(P_1^{n-\delta'} P_2^n P_3^n).$$

2.6 Cinquième étape

Nous allons à présent utiliser la formule obtenue pour $N_U(P_1, P_2, P_3)$ dans la proposition 2.5.3 pour trouver une formule asymptotique pour $N_U(B)$. Pour résoudre ce problème, nous allons appliquer la méthode développée par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour le cas les hypersurfaces diagonales des espaces multiprojectifs, et reprise dans la section 9 de [Sch2]. On considère une fonction $h : \mathbf{N}^3 \to [0, +\infty[$. Conformément aux notations de [B-B], on dira que h est une $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$-fonction si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. On a
$$\sum_{\substack{l \leqslant L \\ m \leqslant M \\ n \leqslant N}} h(l, m, n) = CL^\beta M^\beta N^\beta + O(L^\beta M^\beta N^\beta \min\{L, M, N\}^{-\delta})$$
pour tous $L, M, N \geqslant 1$.

2. Il existe des fonctions $c_1, c_2, c_3 : \mathbf{N} \to [0, +\infty[$ telles que :

$$\sum_{\substack{m \leqslant M \\ n \leqslant N}} h(l,m,n) = c_1(l) M^\beta N^\beta + O\left(l^D M^\beta N^\beta \min\{M,N\}^{-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $M, N \geqslant 1$ et $l \leqslant M^\alpha N^\alpha$,

$$\sum_{\substack{l \leqslant L \\ n \leqslant N}} h(l,m,n) = c_2(m) L^\beta N^\beta + O\left(m^D L^\beta N^\beta \min\{L,N\}^{-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $L, N \geqslant 1$ et $m \leqslant L^\alpha N^\alpha$,

$$\sum_{\substack{l \leqslant L \\ m \leqslant M}} h(l,m,n) = c_3(n) L^\beta M^\beta + O\left(n^D L^\beta M^\beta \min\{L,M\}^{-\delta}\right)$$

uniformément pour tous $L, M \geqslant 1$ et $n \leqslant L^\alpha M^\alpha$.

3. Il existe des fonctions $\tilde{c_1}, \tilde{c_2}, \tilde{c_3} : \mathbf{N}^2 \to [0, +\infty[$ telles que :

$$\sum_{l \leqslant L} h(l,m,n) = \tilde{c_1}(m,n) L^\beta + O(\max\{m,n\}^D L^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous $L \geqslant 1$ et $\max\{m,n\} \leqslant L^\alpha$,

$$\sum_{m \leqslant M} h(l,m,n) = \tilde{c_2}(l,n) M^\beta + O(\max\{l,n\}^D M^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous $M \geqslant 1$ et $\max\{l,n\} \leqslant M^\alpha$,

$$\sum_{n \leqslant N} h(l,m,n) = \tilde{c_3}(l,m) N^\beta + O(\max\{l,m\}^D N^{\beta-\delta})$$

uniformément pour tous $N \geqslant 1$ et $\max\{l,m\} \leqslant N^\alpha$.

On a la proposition suivante qui est un corollaire immédiat de [B-B, Théorème 2.1] :

Proposition 2.6.1. *Si h est une $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$-fonction, alors on a la formule asymptotique :*

$$\sum_{lmn \leqslant P} h(l,m,n) = \frac{1}{2} C \beta^2 P^\beta \log(P)^2 + O(P^\beta \log(P)).$$

Nous allons appliquer ce résultat à la fonction

$$h(l_1, l_2, l_3) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in U \mid |\boldsymbol{x}| = l_1,\ |\boldsymbol{y}| = l_2,\ |\boldsymbol{z}| = l_3,\ F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}$$

(en remarquant que $N_U(B) = \sum_{l_1l_2l_3\leqslant B} h(l_1,l_2,l_3))$. Pour cela nous allons montrer que cette fonction est bien une $(\beta, C, D, \alpha, \delta)$-fonction (pour des constantes $C, \delta, \beta, \alpha, D$ que nous préciserons).

Remarquons que cette fonction vérifie bien la condition 1 avec $\beta = n$, d'après la proposition 2.5.3. D'autre part, par le corollaire 2.3.13, on a pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$ et $P_2 \leqslant P_3$:

$$N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} P_2^n P_3^n + O(|\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$

uniformément pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| < (P_2^{1-3\theta_2}P_3)^{\frac{1}{2}}$ pour un $\theta_2 < \frac{1}{5}$ fixé. Donc en choisissant $\theta_2 < \frac{1}{6}$, la formule est vraie pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| \leqslant P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{2}}$. Si l'on note

$$N_{U,\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (P_2\mathcal{B}_2 \times P_3\mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{2n+2} \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U,\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\}$$

On a alors que

$$N_{U,\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) + O(T_{1,\boldsymbol{x}}) + O(T_{2,\boldsymbol{x}}) + O(T_{3,\boldsymbol{x}}) + O(T_{4,\boldsymbol{x}})$$

où

$$T_{1,\boldsymbol{x}} = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0,\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} \tag{2.71}$$

$$T_{2,\boldsymbol{x}} = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{n+1} \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0,\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} \tag{2.72}$$

$$T_{3,\boldsymbol{x}} = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\boldsymbol{z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0,\ \forall j\ B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\} \tag{2.73}$$

$$T_{4,\boldsymbol{x}} = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_2\mathcal{B}_2) \times (\mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z}) \cap P_3\mathcal{B}_3) \mid \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0,\ \forall i\ B''_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\} \tag{2.74}$$

En reprenant la formule (2.67), et en remarquant que, pour tous $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$

$$\operatorname{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) \ll 1$$

et

$$\frac{1}{|\det(\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})|} = \frac{\operatorname{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} \leqslant 1,$$

on obtient :

$$T_{1,\boldsymbol{x}} \ll \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}_{2,\lambda}^c \cap P_2\mathcal{B}_2} P_3^n \ll P_2^{n+1-\lambda} P_3^n \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

On montre de même que

$$T_{2,\boldsymbol{x}} \ll P_2^n P_3^{n-1}.$$

Par ailleurs, si $B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0$ pour tout j, alors $\boldsymbol{z} \in V_{3,\boldsymbol{x}}^*$, et donc si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z})$:

$$T_{3,\boldsymbol{x}} \ll P_2^{n+1} P_3^{\lambda} \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

De même on montre

$$T_{4,\boldsymbol{x}} \ll P_2^{n-1} P_3^n.$$

Par conséquent, si $P_2 \leqslant P_3$, on a

$$N_{U,\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) = N_{\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) + O(P_2^{n-1}P_3^n) = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}} P_2^n P_3^n + O(|\boldsymbol{x}|^4 P_2^{n-\delta} P_3^n)$$

uniformément pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| \leqslant P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{2}}$. Par les mêmes calculs, on obtient exactement le même résultat dans le cas $P_3 \leqslant P_2$. Par conséquent, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{l_2 \leqslant P_2,\, l_3 \leqslant P_3} h(l_1,l_2,l_3) &= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}), |\boldsymbol{x}| = l_1} N_{U,\boldsymbol{x}}(P_2,P_3) \\ &= c_1(l_1) P_2^n P_3^n + O\left(l_1^{n+4} P_2^n P_3^n \min\{P_2,P_3\}^{-\delta} \right), \end{aligned}$$

uniformément pour tout $l_1 \leqslant P_2^{\frac{1}{4}} P_3^{\frac{1}{4}}$, avec

$$c_1(l_1) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}), |\boldsymbol{x}| = l_1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}} J_{\boldsymbol{x}}.$$

Donc h vérifie le premier point de la condition 2 avec $D = n+4$, et $\alpha = \frac{1}{4}$. Par symétrie, on montre de même que h vérifie les deux autres points de la condition 2.

On fixe $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}) \times \mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z})$ tels que $\max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0$. Si l'on note

$$N_{U,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(P_3) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3 \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U,\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\},$$

on remarque que

$$N_{U,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(P_3) = N_{\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) + O(T_{1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) + O(T_{2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) + O(T_{3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}),$$

avec

$$T_{1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \operatorname{card}\{\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_{3,\lambda}(\mathbf{Z})^c \cap P_3\mathcal{B}_3\},$$

$$T_{2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \mathrm{card}\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3,\ B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = 0\ \forall j\},$$
$$T_{3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \mathrm{card}\{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n+1} \cap P_3\mathcal{B}_3,\ B''_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\ \forall i\}.$$

On a alors immédiatement

$$T_{1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ll P_3^{n+1-\lambda} \ll P_3^{n-1},$$
$$T_{2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ll P_3^{\lambda} \ll P_3^{n-1},$$
$$T_{3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ll P_3^{\lambda} \ll P_3^{n-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} N_{U,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(P_3) &= N_{\Lambda_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},\mathcal{B}_3}(P_3) + O(P_3^{n-1}) \\ &= \frac{\mathrm{pgcd}_k(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})}{||(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_k||_2} P_3^n + O(P_3^{n-1}). \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{l_3 \leqslant P_3} h(l_1,l_2,l_3) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_{1,\lambda}(\mathbf{Z}),|\boldsymbol{x}|=l_1 \\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{A}_{2,\lambda}(\mathbf{Z}),|\boldsymbol{y}|=l_2 \\ \max_k |B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\neq 0}} N_{U,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(P_3) \\ &= \tilde{c_3}(l_1,l_2)P_3^n + O\left(l_1^n l_2^n P_3^{n-1}\right), \end{aligned}$$

et donc h vérifie le troisième point de la condition 3 pour un α quelconque et pour $D = 2n$, et par symétrie, cette condition est entièrement vérifiée.

On a donc montré que h est une $(n, \sigma, 2n, \frac{1}{4}, \delta)$-fonction, et donc en appliquant la proposition 2.6.1, on trouve :

Proposition 2.6.2. *Si $n \geqslant 28$, alors pour tout $B \geqslant 1$, on a la formule asymptotique :*

$$N_U(B) = \frac{1}{2}n^2\sigma B^n \log(B)^2 + O\left(B^n \log(B)\right).$$

2.7 Conclusion et interprétation des constantes

Nous pouvons finalement calculer le cardinal

$$\tilde{N}_U(B) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U \cap (\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{Z}^{n+1}) \mid$$
$$(x_0,...,x_n),(y_0,...,y_n),(z_0,...,z_n) \text{ primitifs},\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ H'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant B\}.$$

On remarque en effet que si $N_{d,e,f}(B)$ désigne

$$\mathrm{card}\{(d\boldsymbol{x}, e\boldsymbol{y}, f\boldsymbol{z}) \in U \cap (d\mathbf{Z}^{n+1} \times e\mathbf{Z}^{n+1} \times f\mathbf{Z}^{n+1}) \mid$$
$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ H'(d\boldsymbol{x}, e\boldsymbol{y}, f\boldsymbol{z}) \leqslant B\} = N_U(B/def)$$

et

$$\tilde{N}_{k,l,m}(B) = \mathrm{card}\{(k\boldsymbol{x}, l\boldsymbol{y}, m\boldsymbol{z}) \in U \cap (k\mathbf{Z}^{n+1} \times l\mathbf{Z}^{n+1} \times m\mathbf{Z}^{n+1}) \mid$$
$$(x_0, ..., x_n), (y_0, ..., y_n), (z_0, ..., z_n) \text{ primitifs }, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0,\ H'(k\boldsymbol{x}, l\boldsymbol{y}, m\boldsymbol{z}) \leqslant B\}$$
$$= \tilde{N}_U(B/klm)$$

(pour $d, e, f, k, l, m \in \mathbf{N}$), alors on a

$$N_{d,e,f}(B) = \sum_{d|k} \sum_{e|l} \sum_{f|m} \tilde{N}_{k,l,m}(B).$$

Par inversions de Möbius successives appliquées à $(d, e, f) = (1, 1, 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_U(B) = \tilde{N}_{(1,1,1)}(B) &= \sum_{k\in\mathbf{N}^*} \mu(k) \sum_{l\in\mathbf{N}^*} \mu(l) \sum_{m\in\mathbf{N}^*} \mu(m) N_{k,l,m}(B) \\
&= \sum_{k,l,m\in\mathbf{N}^*} \mu(k)\mu(l)\mu(m) N_U(B/klm) \\
&= \frac{1}{2}\sigma \sum_{k,l,m\in\mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)\mu(l)\mu(m)}{k^n l^n m^n} n^2 B^n \log(B)^2 + O(B^n \log(B)).
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{k,l,m\in\mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)\mu(l)\mu(m)}{k^n l^n m^n} = \left(\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)}{k^n} \right)^3,$$

et que

$$\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{\mu(k)}{k^n} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) = \frac{1}{\zeta(n)}$$

($\mathcal{P}$ désignant l'ensemble des entiers premiers). En rappelant que l'on a $\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{8}\tilde{N}_U(B^{\frac{1}{n}})$, on a donc finalement démontré le résultat suivant :

Proposition 2.7.1. *Pour tout $n \geqslant 28$, on a :*

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{16}\sigma' B \log(B)^2 + O(B \log(B)),$$

lorsque $B \to \infty$, où l'on a noté $\sigma' = \sigma \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3$.

Nous allons à présent donner une interprétation des constantes introduites, et constater finalement que l'expression obtenue est bien en accord avec les formules conjecturées par Peyre dans [Pe1].

Dans tout ce qui va suivre, on notera π la projection

$$\pi : \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{3(n+1)} \setminus \Big((\{\mathbf{0}\} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1}) \cup (\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1}) \\ \cup (\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{n+1} \times \{\mathbf{0}\}) \Big) \to \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^{n} \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^{n} \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^{n}$$

On note $W = \pi^{-1}(V)$. Si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in W$ est un point lisse avec, par exemple, $B_{k_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$ pour un certain $k_1 \in \{0, ..., n\}$, alors la forme de Leray ω_L sur W est donnée par

$$\omega_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \frac{(-1)^{n+1-k_1}}{B_{k_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} dx_0 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_0 \wedge ... \wedge dy_n \\ \wedge dz_0 \wedge ... \wedge \widehat{dz_{k_1}} \wedge ... \wedge dz_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Pour toute place $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$ la forme de Leray induit une mesure locale $\omega_{L,\nu}$.

2.7.1 Étude de l'intégrale J

Rappelons que l'on a

$$J = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3} e(\beta F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} d\beta.$$

et cette intégrale est absolument convergente (cf. lemme 2.2.11). On pose par ailleurs :

$$\sigma_\infty(V) = \int_{W \cap [-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty}.$$

Nous allons montrer que l'intégrale J coïncide avec $\sigma_\infty(W)$. Il nous suffit de le vérifier localement i.e. montrons que pour tout ouvert U de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$ sur lequel, par exemple, $B_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$,

$$\sigma_\infty(U) = \int_{U \cap [-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty} = \int_{U \cap [-1,1]^{3n+3}} \frac{1}{|B_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\hat{\boldsymbol{z}},$$

(avec $d\hat{\boldsymbol{z}} = dz_0 ... dz_{n-1}$) coïncide avec

$$J_U = \int_{\mathbf{R}} \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} e(\beta F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} d\beta.$$

Considèrons donc un tel ouvert U. De la même manière que pour le lemme 2.2.11, on montre que $J_U = \lim_{\mu \to \infty} J_U(\mu)$, où

$$J_U(\mu) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{U \cap (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)} e(\beta F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} d\beta$$

pour tout $\mu > 0$. On peut réécrire l'intégrale $J_U(\mu)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} J_U(\mu) &= \int_{U\cap(\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\times\mathcal{B}_3)} \left(\int_{-\mu}^{\mu} e(\beta F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))d\beta\right) d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{z} \\ &= \int_{U\cap(\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\times\mathcal{B}_3)} \frac{\sin(2\pi\mu F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))}{\pi F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

On remplace ensuite la variable z_n par $t = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, et on note

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } z_n = \frac{t}{B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} z_k \in [-1,1] \text{ et } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors (si $A = \sum_{i,j} |\alpha_{i,j,n}|$) :

$$J_U = \int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi\mu t)}{\pi t} \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(t)}{|B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}}dt$$

Si l'on note

$$\phi(t) = \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(t)}{|B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}},$$

on remarque que cette fonction est à variations bornées. Par conséquent par application des résultats d'analyse de Fourier (voir [W-W, 9.43]) on a que

$$\begin{aligned} J_U = \phi(0) &= \int_{[-1,1]^{3n+2}} \frac{\chi(0)}{|B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \int_{U\cap[-1,1]^{3n+3}} \omega_{L,\infty} = \sigma_\infty(U). \end{aligned}$$

Remarquons que ces calculs constituent un équivalent du travail effectué par Igusa dans [Ig, §IV.6] pour le cas les intégrales de fonctions indicatrices.

Nous allons à présent interpréter cette constante σ_∞ en termes de mesures de Tamagawa. Rappelons que (avec les notations de [Sch2]) la mesure $\tau_\infty = \omega_\infty$ est définie localement sur l'ouvert

$$U_{0,0,0} = \{([\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}],[\boldsymbol{z}]) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \mid x_0y_0z_0 \neq 0,\ B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0\}$$

par

$$\omega_\infty = \frac{du_1...du_ndv_1...dv_ndw_1...dw_{n-1}}{h_\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|B_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}$$

où $\boldsymbol{u} = (1,u_1,...,u_n)$, $\boldsymbol{v} = (1,v_1,...,v_n)$, $\boldsymbol{w} = (1,w_1,...,w_n)$ et

$$h_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = h_\infty^1(\boldsymbol{x})h_\infty^2(\boldsymbol{y})h_\infty^3(\boldsymbol{z}),$$

avec

$$h_\infty^1(\boldsymbol{x}) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |x_i|^n,\ \ h_\infty^2(\boldsymbol{y}) = \max_{0\leqslant j\leqslant n} |y_j|^n,\ \ h_\infty^3(\boldsymbol{z}) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |z_k|^n.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.7.2. *On a*

$$\tau_\infty = \frac{n^3}{8}\sigma_\infty.$$

Démonstration. On démontre le résultat localement i.e. montrons que pour tout ouvert U par exemple inclus dans $U_{0,0,0}$ défini plus haut (les autres cas se traitant de manière analogue) on a $\tau_\infty(U) = \frac{n^3}{8}\sigma_\infty(\pi^{-1}(U))$. Par définition de la mesure de Leray, pour un tel ouvert U, on a

$$\sigma_\infty(\pi^{-1}(U)) = \int_{\substack{\pi^{-1}(U)\cap\{\max_i |x_i|\leqslant 1 \\ \max_j |y_j|\leqslant 1,\ \max_k |z_k|\leqslant 1\}}} \frac{d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}}}{|B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|}$$

avec $d\hat{\boldsymbol{z}} = dz_0...dz_{n-1}$. On remarque que

$$\max_i |x_i| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ |x_0| \leqslant \left(\max_{i\neq 0}\frac{|x_i|}{|x_0|}\right)^{-1}.$$

On applique alors les changements de variables $x_i = x_0u_i$, $y_j = y_0v_j$ et $z_k = z_0w_k$ dans l'intégrale ci-dessus. On a alors que

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in [-1,1]^{3n+3} \ \Leftrightarrow\ |x_0| \leqslant (\max_i |u_i|)^{-1},\ |y_0| \leqslant (\max_j |v_j|)^{-1},$$
$$|z_0| \leqslant (\max_k |w_k|)^{-1}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\sigma_\infty(\pi^{-1}(U)) \\
&= \int_U \frac{1}{|B_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}\left(\int_{\substack{|x_0|^n\leqslant h^1_\infty(\boldsymbol{u}) \\ |y_0|^n\leqslant h^2_\infty(\boldsymbol{v}) \\ |z_0|^n\leqslant h^3_\infty(\boldsymbol{w})}} |x_0|^{n-1}|y_0|^{n-1}|z_0|^{n-1}dx_0dy_0dz_0\right) d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}d\hat{\boldsymbol{w}} \\
&= \frac{8}{n^3}\int_U \frac{d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}d\hat{\boldsymbol{w}}}{h_\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|B_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|} = \frac{8}{n^3}\int_U \omega_\infty
\end{aligned}$$

□

2.7.2 Étude de la série $\mathfrak{S}$

Rappelons que l'on a

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} A(q)$$

en notant

$$A(q) = q^{-3n-3}\sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\ \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right)$$

et nous avons vu d'autre part (cf. lemme 2.2.3) que cette série converge absolument.

Lemme 2.7.3. *Si* $\mathrm{pgcd}(q_1, q_2) = 1$*, alors on a*

$$A(q_1 q_2) = A(q_1)A(q_2),$$

autrement dit, la fonction A *est multiplicative.*

Démonstration. On remarque dans un premier temps que

$$A(q) = q^{-3n-3} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{b\in\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}} e\left(\frac{a}{q} B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')b\right)\right). \tag{2.75}$$

Or on a

$$\sum_{b\in\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}} e\left(\frac{a}{q} B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')b\right) = \begin{cases} q & \text{si } B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') \equiv 0\ (q) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A(q) &= q^{-2n-2} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*} \mathrm{card}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') \equiv 0,\ \forall k\} \\ &= \varphi(q) q^{-2n-2}\, \mathrm{card}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') \equiv 0\ (q),\ \forall k\}. \end{aligned}$$

Or si l'on a $q = q_1 q_2$, par le théorème chinois :

$$\begin{aligned} &\mathrm{card}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}' \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') \equiv 0\ (q),\ \forall k\} \\ &\qquad = \mathrm{card}\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1' \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1') \equiv 0\ (q_1),\ \forall k\} \\ &\qquad\qquad . \mathrm{card}\{\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2' \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^{n+1} \mid B_k(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2') \equiv 0\ (q_2),\ \forall k\}. \end{aligned}$$

On en déduit que A est bien multiplicative. □

Puisque A est multiplicative et absolument convergente, on a la formule :

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \sigma_p$$

où

$$\sigma_p = \sum_{k=0}^{\infty} A(p^k).$$

Par la suite on note pour tout $q \in \mathbf{N}^*$,

$$M(q) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'') \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{3n+3} \mid F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'') \equiv 0\ (q)\} \tag{2.76}$$

On peut alors interpréter σ_p à l'aide du résultat suivant :

Lemme 2.7.4. *On a que pour tout $N > 0$:*

$$\sum_{k=0}^{N} A(p^k) = \frac{M(p^N)}{p^{N(3n+2)}},$$

et par conséquent :

$$\sigma_p = \lim_{N\to\infty} \frac{M(p^N)}{p^{N(3n+2)}}.$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que

$$\begin{aligned} M(q) &= q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{t}{q} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right) \\ &= q^{-1} \sum_{q_1|q} \sum_{\substack{0\leqslant a<q_1 \\ \mathrm{pgcd}(a,q_1)=1}} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{q_1} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right). \end{aligned}$$

On a donc, si $q = p^N$:

$$\begin{aligned} M(p^N) &= p^{-N} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{0\leqslant a<p^k \\ \mathrm{pgcd}(a,p^k)=1}} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right) \\ &= p^{-N} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{0\leqslant a<p^k \\ \mathrm{pgcd}(a,p^k)=1}} \left(\frac{p^N}{p^k}\right)^{3n+3} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right) \\ &= p^{(3n+2)N} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{0\leqslant a<p^k \\ \mathrm{pgcd}(a,p^k)=1}} p^{-(3n+3)k} \sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}''\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+1}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'')\right) \\ &= p^{(3n+2)N} \sum_{k=0}^{N} A(p^k), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous allons à présent étudier le lien entre les constantes σ_p et la mesure de Tamagawa τ_p définie (avec les notations de [Sch2]) par :

$$\tau_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \omega_p$$

où ω_p est la mesure définie localement sur $V(\mathbf{Q}_p) \cap U_{0,0,0}$ par

$$\omega_p = \frac{du_{1,p}...du_{n,p}dv_{1,p}...dv_{n,p}dw_{1,p}...dw_{n-1,p}}{h_p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|B_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|_p}$$

où $\boldsymbol{u} = (1, u_1, ..., u_n)$, $\boldsymbol{v} = (1, v_1, ..., v_n)$, $\boldsymbol{w} = (1, w_1, ..., w_n)$ et

$$h_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = h_p^1(\boldsymbol{x})h_p^2(\boldsymbol{y})h_p^3(\boldsymbol{z}),$$

avec

$$h_p^1(\boldsymbol{x}) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p^n, \;\; h_p^2(\boldsymbol{y}) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |y_j|_p^n, \;\; h_p^3(\boldsymbol{z}) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |z_k|_p^n.$$

Lemme 2.7.5. *Soit $p \in \mathcal{P}$, on pose :*

$$a(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-3}.$$

On a alors

$$\int_{\substack{W(\mathbf{Q}_p) \cap \{h_p^1(\boldsymbol{x}) \leqslant 1 \\ h_p^2(\boldsymbol{y}) \leqslant 1, \, h_p^3(\boldsymbol{z}) \leqslant 1\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(p)\omega_p(V(\mathbf{Q}_p)).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout ouvert U de $\mathbf{A}^{3n-1}_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}_p} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}_p} \times \mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{Q}_p}$ de la forme $U_1 \times U_2 \times U_3$, tel que pour tout $([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}], [\boldsymbol{z}]) \in U$ on a (par exemple) $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ et $B_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$ (les autres cas se traitant de façon analogue) l'égalité

$$\int_{\substack{\pi^{-1}(U) \cap \{h_p^1(\boldsymbol{x}) \leqslant 1 \\ h_p^2(\boldsymbol{y}) \leqslant 1, \, h_p^3(\boldsymbol{z}) \leqslant 1\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(p)\omega_p(U)$$

est vérifiée. Remarquons dans un premier temps que, pour un tel ouvert U, on a

$$a(p)\omega_p(U) = a(p) \int_{U_1 \times U_2 \times U_3} \frac{du_{1,p}...du_{n,p}dv_{1,p}...dv_{n,p}dw_{1,p}...dw_{n-1,p}}{|B_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|_p h_p^1(\boldsymbol{u}) h_p^2(\boldsymbol{v}) h_p^3(\boldsymbol{w})}.$$

En appliquant trois fois le lemme 5.4.5 de [Pe1], on obtient alors :

$$a(p)\omega_p(U) = \int_{\pi^{-1}(U)} \frac{d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\hat{\boldsymbol{z}}}{|B_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_p} = \int_{\pi^{-1}(U)} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

□

Nous allons à présent établir le lemme suivant dont la démonstration est inspirée de [P-T, Lemme 3.2] et de [Sch2, Lemme 3.4] :

Lemme 2.7.6. *Soit*

$$W^*(r) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^r)^{3n+3}, \; \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}(p), \; \boldsymbol{y} \not\equiv \mathbf{0}(p), \\ \boldsymbol{z} \not\equiv \mathbf{0}(p), \; F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv 0(p^r)\},$$

et on pose $N^*(r) = \mathrm{card}(W^*(r))$. Il existe alors un entier r_0 tel que pour tout $r \geqslant r_0$:

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}, \; \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}(p) \\ \boldsymbol{y} \not\equiv \mathbf{0}(p), \; \boldsymbol{z} \not\equiv \mathbf{0}(p), \; F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\}}} \omega_{L,p} = \frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}}.$$

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$. Dans tout ce qui suit, on note $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]_r = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^r$. On écrit alors :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p)\\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^r\\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p)}} \int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r=(\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \tag{2.77}$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W^*(r)} \int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r=(\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{2.78}$$

Puisque V est lisse, il existe un $r > 0$ assez grand tel que, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$ tel que $\boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}(p)$, $\boldsymbol{y} \not\equiv \mathbf{0}(p)$, $\boldsymbol{z} \not\equiv \mathbf{0}(p)$ et $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$:

$$c = \inf_{i,j,k}\{\nu_p\left(B_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right),\ \nu_p\left(B'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\right),\ \nu_p\left(B''_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right)\}$$

soit non nul et constant sur la classe définie par $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. On peut supposer que $r > c$ et que $c = \nu_p\left(B_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)$. On considère $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$ tel que $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r = (\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z})$, et $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}') \in \mathbf{Z}_p^{3n+3}$ quelconque. On a alors

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') = F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \sum_{k=0}^{n} B_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})w'_k + \sum_{j=0}^{n} B'_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})v'_j \\ + \sum_{i=0}^{n} B''_i(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})u'_i + G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'), \end{aligned}$$

où $G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ est une somme de termes contenant au moins deux facteurs u'_i, v'_j ou w'_k. Ainsi, on a donc, si $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}') \in (p^r\mathbf{Z}_p)^{3n+3}$:

$$F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') \equiv F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})(p^{r+c}).$$

Par conséquent, l'image de $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ dans $\mathbf{Z}_p/p^{r+c}$ dépend uniquement de $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^r$, on note alors $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ cette image.

Si $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq 0$, alors l'intégrale

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r=(\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

est nulle, et l'ensemble

$$\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{r+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r = (\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z}),\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0(p^{r+c})\}$$

est vide.

Si $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ alors, par le lemme de Hensel, les applications coordonnées $X_0,...,X_n,Y_0,...,Y_n,Z_0,...,Z_{n-1}$ définissent un difféomorphisme de

$$\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r = (\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z}),\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 0\}$$

sur

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{z}}) + (p^r\mathbf{Z}_p)^{3n+2},$$

où $\hat{\boldsymbol{z}} = (z_0,...,z_{n-1})$. Par conséquent, on a :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r=(\boldsymbol{x},\mathbf{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$
$$= \int_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{z}})+(p^r\mathbf{Z}_p)^{3n+2}} p^c du_{0,p}...du_{n,p}dv_{0,p}...dv_{n,p}dw_{0,p}...dw_{n-1,p} = p^{c-r(3n+2)}.$$

On a d'autre part, puisque $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{r+c}$ ne dépend que de $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$:

$$p^{-(r+c)(3n+2)}\operatorname{card}\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{r+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$
$$F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0(p^{r+c})\} = p^{-(r+c)(3n+2)}p^{(3n+3)c} = p^{c-r(3n+2)}.$$

On a donc finalement :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p)\\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W^*(r)\\ F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} p^{c-r(3n+2)}$$
$$= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W^*(r)} p^{-(r+c)(3n+2)}\operatorname{card}\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{r+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_r = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$
$$F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0(p^{r+c})\} = \frac{N^*(r+c)}{p^{(r+c)(3n+2)}}.$$

D'où le résultat.

□

Nous établissons à présent un lemme issu de [P-T, Lemme 3.3] et [Sch2, Lemme 3.5].

Lemme 2.7.7. *On a que*

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p)\\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}} \omega_{L,p} = \left(1-\frac{1}{p^n}\right)^3 \int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3}\\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p},$$

et

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}} = \left(1-\frac{1}{p^n}\right)^3\sigma_p.$$

Démonstration. Pour démontrer la première égalité, il suffit de remarquer que :

$$\omega_{L,p}(p\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p\boldsymbol{z}) = p^{-n}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$

$$\omega_{L,p}(p\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \omega_{L,p}(p\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p\boldsymbol{z}) = \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},p\boldsymbol{z}) = p^{-2n}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$

$$\omega_{L,p}(p\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},p\boldsymbol{z}) = p^{-3n}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p)\\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}}\omega_{L,p} &= \left(1-\frac{3}{p^n}+\frac{3}{p^{2n}}-\frac{1}{p^{3n}}\right)\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3}\\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}}\omega_{L,p}\\ &= \left(1-\frac{1}{p^n}\right)^3\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{3n+3}\\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}}\omega_{L,p}.\end{aligned}$$

Nous avons vu par ailleurs que (cf. lemme 2.7.4) :

$$\sigma_p = \lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{p^{r(3n+2)}},$$

où $N(r) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^r \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \equiv 0(p^r)\}$. On considère ensuite pour $r>0$ fixé et pour des entiers i,j,k tels que $r \geqslant i+j+k$:

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(i,j,k) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{x}\in(p^i\mathbf{Z}_p/p^r)^{n+1},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p^{i+1}),&\\ \boldsymbol{y}\in(p^j\mathbf{Z}_p/p^r)^{n+1},\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p^{j+1}),\ \boldsymbol{z}\in(p^k\mathbf{Z}_p/p^r)^{n+1},&\\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p^{k+1}),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv 0(p^r)\}.&\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(i,j,k) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x} \mod p^{r-i},\boldsymbol{y} \mod p^{r-j},\boldsymbol{z} \mod p^{r-k}) \mid \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}(p),&\\ \boldsymbol{y}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ \boldsymbol{z}\not\equiv\mathbf{0}(p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv\mathbf{0}(p^{r-i-j-k})\}&\end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(i,j,k) &= p^{(n+1)(i+j)}p^{(n+1)(j+k)}p^{(n+1)(i+k)}N^*(r-i-j-k)\\ &= p^{2(n+1)(i+j+k)}N^*(r-i-j-k).\end{aligned}$$

Soit r_0 un entier comme dans le lemme précédent, et soit

$$I(r) = \{(i,j,k) \mid r-r_0 < i+j+k \leqslant r-r_0+3\}.$$

On remarque que :

$$N(r) = \sum_{\substack{i,j,k\geqslant 0\\ r-i+j+k\geqslant r_0}} \widetilde{N}(i,j,k)$$
$$+O\left(\sum_{(i,j,k)\in I(r)} \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^r \mid \boldsymbol{x}\equiv \mathbf{0}(p^i),\ \boldsymbol{y}\equiv \mathbf{0}(p^j),\ \boldsymbol{z}\equiv \mathbf{0}(p^k)\}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\in I(r)} \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^r \mid \boldsymbol{x}\equiv \mathbf{0}(p^i),\ \boldsymbol{y}\equiv \mathbf{0}(p^j),\ \boldsymbol{z}\equiv \mathbf{0}(p^k)\}&\\ \ll_{r_0} r^2 \max_{(i,j,k)\in I(r)} p^{(n+1)(r-i)+(n+1)(r-j)+(n+1)(r-k)}&\\ \ll_{r_0} r^2 p^{(3n+2)r} \max_{(i,j,k)\in I(r)} p^{r-2(i+j+k)}&\\ \ll_{p,r_0} r^2 p^{(3n+2)r}p^{-r}.&\end{aligned}$$

On a donc

$$N(r) = \sum_{\substack{i,j,k\geqslant 0\\ r-i+j+k\geqslant r_0}} p^{2(n+1)(i+j+k)} N^*(r-i-j-k) + O(r^2 p^{(3n+1)r}).$$

Puisque la somme est restreinte aux (i,j,k) tels que $r_0 \leqslant r-i-j-k$, on a alors par le lemme précédent :

$$\frac{N^*(r-i-j-k)}{p^{(r-i-j-k)(3n+2)}} = \frac{N^*(r)}{p^{r(3n+2)}}.$$

On a donc

$$N^*(r-i-j-k) = N^*(r)p^{-(3n+2)(i+j+k)},$$

et donc

$$N(r) = \left(\sum_{r_0\leqslant r-i-j-k} p^{-(i+j+k)n}\right) N^*(r) + O(r^2 p^{(3n+1)r}).$$

On obtient donc finalement

$$\sigma_p = \lim_{r\to\infty} p^{-(3n+2)r} N(r) = \left(1-\frac{1}{p^n}\right)^{-3} \lim_{r\to\infty} p^{-(3n+2)r} N^*(r).$$

$\square$

D'après ce lemme, on a donc :

$$\sigma_p = \int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in \mathbf{Z}_p^{3n+3} \\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p}.$$

En utilisant le lemme 2.7.5 on a ainsi :

$$\tau_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^3 \sigma_p. \tag{2.79}$$

2.7.3 Conclusion

Rappelons que la formule asymptotique conjecturée par Peyre dans [Pe1] pour le nombre $\mathcal{N}_U(B)$ de points de hauteur bornée par B sur l'ouvert U de Zariski de la variété V (pour la hauteur associée au fibré anticanonique ω_V^{-1}) est :

$$\alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)B\log(B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))-1} \tag{2.80}$$

où

$$\alpha(V) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1)!}\int_{\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y\rangle} dy,$$

$$\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{y \in \mathrm{Pic}(V)\otimes \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in \Lambda^1_{\mathrm{eff}}(V), \langle x,y\rangle \geqslant 0\}$$

et

$$\beta(V) = \mathrm{card}(H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V}))),$$

$$\tau_H(V) = \prod_{\nu\in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} \tau_\nu(V(\mathbf{Q}_\nu)).$$

Or, dans le cas présent on a

$$\mathrm{Pic}(V) = \mathbf{Z}.\mathcal{O}_V(1,0,0)\oplus\mathbf{Z}.\mathcal{O}_V(0,1,0)\oplus\mathbf{Z}.\mathcal{O}_V(0,0,1) \simeq \mathbf{Z}^3, \quad \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V)) = 3,$$

$$\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(n,n,n),$$

$$\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(V) = \mathbf{R}^+.\mathcal{O}_V(1,0,0)\oplus\mathbf{R}^+.\mathcal{O}_V(0,1,0)\oplus\mathbf{R}^+.\mathcal{O}_V(0,0,1) \simeq (\mathbf{R}^+)^3.$$

On a par conséquent :

$$\alpha(V) = \frac{1}{2}\int_{[0,+\infty[^3} e^{-nt_1-nt_2-nt_3} dt_1dt_2dt_3 = \frac{1}{2n^3}.$$

D'autre part $\mathrm{Pic}(\overline{V}) \simeq \mathbf{Z}^3$, et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(\overline{V})$, on a donc

$$\beta(V) = 1.$$

Par ailleurs, d'après ce qui a été vu dans les sections précédentes, on a

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \tau_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \mathfrak{S}\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)^3$$

et

$$\tau_\infty(V(\mathbf{R})) = \frac{n^3}{8}J.$$

Ainsi on a ici

$$\begin{aligned}
\alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)B\log(B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))-1} &= \frac{1}{16}\mathfrak{S}J\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)^3 B\log(B)^2\\
&= \frac{1}{16}\sigma' B\log(B)^2,
\end{aligned}$$

et on retrouve bien la formule de la proposition 2.7.1.

Chapitre 3

Variétés toriques particulières

3.1 Introduction

La conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée des variétés algébriques a récemment été démontrée par Schindler pour le cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs par des arguments généralisant la méthode du cercle telle qu'elle a été utilisée par Birch pour le cas des hypersurfaces des espaces projectifs. Une idée naturelle est alors de chercher à généraliser la méthode de Schindler à des hypersurfaces de variétés toriques plus générales dont le groupe de Picard a pour rang 2.

On considère une variété torique complète lisse $X = X(\Delta)$ de dimension n définie par le réseau $N = \mathbf{Z}^n$ et un éventail Δ ayant $n+2$ arêtes engendrées par des vecteurs notés $v_0, v_1, ..., v_n, v_{n+1} \in \mathbf{R}^n$. De telles variétés ont été classifiées par Kleinschmidt dans [K]. Nous supposerons par ailleurs que le groupe de Picard et le cône effectif de X sont engendrés par les classes de diviseurs associés aux arêtes de 2 vecteurs générateurs de l'éventail, disons v_0 et v_{n+1}. Par ailleurs, pour des raisons pratiques, nous supposerons que

$$v_0 = -\sum_{i=1}^{m} v_i,$$

et

$$v_{n+1} = -\sum_{i=r+1}^{n} v_i,$$

pour des entiers r, m tels que $0 \leqslant r \leqslant m \leqslant n$. On note note D_0 et D_{n+1} les diviseurs associés à v_0 et v_{n+1}, et $[D_0]$, $[D_{n+1}]$ leurs classes dans $\mathrm{Pic}(X)$. On peut alors écrire

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}[D_0] \oplus \mathbf{Z}[D_{n+1}],$$

$$\Lambda^1_{\mathrm{Eff}} = \mathbf{R}^+[D_0] + \mathbf{R}^+[D_{n+1}],$$

et la classe du diviseur anticanonique de X est

$$[-K_X] = (m+1)[D_0] + (n-r+1)[D_{n+1}].$$

D'autre part, pour $d_1, d_2 \in \mathbf{N}$ fixés considérons un diviseur de classe $d_1[D_0]+d_2[D_{n+1}]$ et une hypersurface Y de dimension supposée supérieure ou égale à 3, définie par une section de ce diviseur. On supposera que l'hypersurface choisie est lisse. Le groupe de Picard de Y est alors de rang 2, et la classe du diviseur anticanonique de Y est donnée par

$$[-K_Y] = (m+1-d_1)[\tilde{D}_0] + (n-r+1-d_2)[\tilde{D}_{n+1}],$$

où $\tilde{D}_0$ et $\tilde{D}_{n+1}$ désignent les diviseurs induits par D_0 et D_{n+1} sur Y. En utilisant par exemple la construction décrite par Salberger dans [Sa, §10], on peut construire explicitement une hauteur H sur X associée à $(n_1-d_1)[D_0]+(n_2-d_2)[D_{n+1}]$. Elle induit une hauteur sur Y qui est la hauteur associée à $[-K_Y]$, et que l'on notera encore H. L'objectif est alors de donner une formule asymptotique pour le nombre

$$\mathcal{N}_U(B) = \mathrm{Card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \cap U \mid H(P) \leqslant B\},$$

pour un ouvert U bien choisi. Plus précisément nous allons montrer que $\mathcal{N}_U(B)$ vérifie la conjecture de Manin, i.e que pour un nombre de variables $n+2$ assez grand (condition analogue à celle donnée par Birch dans [Bi] pour les hypersurfaces de l'espace projectif), ce cardinal est de la forme

$$\mathcal{N}_U(B) = C_H(Y)B\log(B) + O(B),$$

où $C_H(Y)$ est la constante conjecturée par Peyre.

La variété torique X peut être définie comme le quotient de

$$X_1 = (\mathbf{A}^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times ((\mathbf{A}^{m-r} \times \mathbf{A}^{n-m+1}) \setminus \{0\}) \subset \mathbf{A}^{n+2}$$

par l'action du tore $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ définie par :

$$\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in X_1,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*,\ (\lambda,\mu).(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\mu\boldsymbol{y}, \mu\boldsymbol{z}).$$

Notons $\pi : X_1 \to X$ la projection canonique. L'hypersurface Y de X est alors $\pi(Y_1)$ où Y_1 est l'hypersurface de X_1 donnée par une équation $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$, où F est un polynôme homogène de degré d_1 (resp. d_2) en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (resp. $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$). En notant

$$V_1^* = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}^{n+2} \mid \forall i \in \{0,...,r\},\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,$$
$$\forall j \in \{r+1,...,m\},\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\},$$

$$V_2^* = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}^{n+2} \mid \forall j \in \{r+1,...,m\},\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,$$
$$\forall k \in \{m+1,...,n+1\},\ \frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\},$$

nous démontrons alors le résultat ci-dessous :

Théorème 3.1.1. *Pour $d_1, d_2 \geqslant 1$, pour tous n, m, r tels que*

$$n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > 13d_2(d_1 + d_2)2^{d_1+d_2}$$

et $r \geqslant 6d_1 - 3$, il existe un ouvert U tel que :

$$\mathcal{N}_U(B) = C_{H_Y}(Y)B\log(B) + O(B),$$

où $C_H(Y)$ est la constante conjecturée par Peyre, lorsque $B \to \infty$.

Pour la construction de l'ouvert U, nous renvoyons le lecteur à la formule (3.151).

Dans la section 2 nous fixons précisément le cadre de notre étude. Nous y décrivons entre autres les variétés toriques auxquelles nous nous intéresserons, l'expression de la hauteur, et la forme des équations définissant les hypersurfaces. Nous montrons par ailleurs que le calcul de $\mathcal{N}_U(B)$ peut se ramener à celui de

$$N_{d,U}(B) = \operatorname{card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}^{r+1} \times \mathbf{Z}^{m-r} \times \mathbf{Z}^{n-m+1}) \cap U \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},$$
$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}),\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1}\max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right)^{n-r+1-d_2} \leqslant B\Big\}$$

où m, r, d_1, d_2 sont des entiers fixés, et F un polynôme homogène de degré d_1 (resp. d_2) en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (resp. $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$).

La méthode utilisée pour évaluer les $N_{d,U}(B)$ est fortement inspirée de celle développée par Schindler dans [Sch2] pour traiter le cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs. Cette méthode consiste dans un premier temps à donner une formule asymptotique pour le nombre $N_{d,U}(P_1, P_2)$ de points $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ de $U \cap \mathbf{Z}^{n+2}$ tels que $|\boldsymbol{x}| \leqslant P_1$ et $\max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right) \leqslant P_2$ pour des bornes P_1, P_2 fixées. Dans la section 3, en utilisant des arguments issus de la méthode du cercle, on établit une formule asymptotique pour $N_{d,U}(P_1, P_2)$ lorsque P_1 et P_2 sont « relativement proches » en un sens que nous préciserons. Dans la section 4 (resp. 5), pour un $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ (resp. $\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^{n-m+1}$) fixé, on donne une formule asymptotique pour le nombre de points $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ (resp. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$) vérifiant $F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ tels que $\max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right) \leqslant P_2$ (resp. $|\boldsymbol{x}| \leqslant P_1$) en utilisant à nouveau la méthode du cercle. Les résultats obtenus combinés avec ceux de la section 2 nous permettrons dans la section 6 d'établir une formule asymptotique pour $N_{d,U}(P_1, P_2)$ avec P_1, P_2 quelconques. Dans la section 7, on utilise les résultats établis par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour conclure quant à la valeur de $N_{d,U}(B)$ à partir des estimations obtenues dans les sections précédentes. Enfin, dans la section 8, on conclut en démontrant la proposition 3.1.1 donnant une formule asymptotique pour $\mathcal{N}_U(B)$. On vérifie en particulier que la constante obtenue est bien celle avancée par Peyre dans [Pe1].

3.2 Préliminaires

Dans les sections 3.2.1 et 3.2.2, nous donnons des descriptions de variétés toriques plus générales que la famille de variétés considérée par la suite dans ce chapitre, ainsi que la construction de leur hauteur. Ces deux sections seront alors également utiles pour le chapitre 4.

3.2.1 Notations et premières propriétés

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 3.2.1. *Étant donné un réseau N, un* éventail *est un ensemble Δ de cônes polyédriques de $N_{\mathbf{R}} = N \otimes \mathbf{R}$ vérifiant :*

1. *Pour tout cône $\sigma \in \Delta$, on a $0 \in \sigma$;*
2. *Toute face d'un cône de Δ est un cône de Δ ;*
3. *L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun de ces deux cônes.*

On dit de plus que l'éventail est
- complet *si $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$,*
- régulier *si chaque cône de Δ est engendré par une famille de vecteurs pouvant être complétée en une base du $\mathbf{Z}$-module N.*

Pour tout éventail Δ nous noterons $\Delta_{\max}$ l'ensemble des cônes de dimension maximale, et pour tout cône $\sigma \in \Delta$, on notera $\sigma(1)$ l'ensemble des vecteurs générateurs des arêtes de σ (i.e les vecteurs $v_1, ..., v_k \in N$ tels que $\sigma = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geqslant 0\}$ et tels que les coefficients de chaque v_i soient premiers entre eux). Pour un cône polyhédrique σ de $N_{\mathbf{R}}$ donné on définit un semi-groupe

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^\vee,$$

où $\sigma^\vee$ (resp. $N^\vee = M$) désigne le cône (resp. réseau) dual de σ (resp. N). La *variété torique affine* sur un corps k associée à σ est la variété affine :

$$U_\sigma = \mathrm{Spec}(k[S_\sigma]) \tag{3.1}$$

On remarque que si σ, τ sont deux cônes de $N_{\mathbf{R}}$, alors

$$\tau \subset \sigma \Rightarrow U_\tau \subset U_\sigma.$$

Étant donné un réseau N et un éventail Δ, on définit une variété algébrique $X = X(\Delta)$ sur k par recollement des ouverts U_σ pour $\sigma \in \Delta$ le long de $U_{\sigma\cap\tau}$. Nous renvoyons le lecteur à [F, §1,2,3] pour plus de détails sur les variétés toriques. Remarquons que la variété $X(\Delta)$ est lisse (resp. complète) si Δ est régulier (resp. complet).

Dans ce qui va suivre nous allons considérer X une variété torique de dimension n définie par un éventail Δ à $d = n+r$ arêtes dont les générateurs seront notés, $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r} \in \mathbf{Z}^n$, et un réseau $N = \mathbf{Z}^n$. On note $D_1, ..., D_n, ..., D_{n+r}$ les diviseurs invariants sous l'action du tore associés aux vecteurs générateurs (voir [F, §3.3]). Rappelons que dans le cas où la variété torique X est lisse, le groupe de Picard de X est de rang r. Pour simplifier nous allons imposer une première condition aux variétés toriques que nous considérons : nous nous intéressons exclusivement aux variétés toriques complètes lisses dont le cône effectif est simplicial et pour laquelle tout diviseur effectif est combinaison linéaire à coefficients positifs de r diviseurs D_i, disons $[D_{n+1}], ..., [D_{n+r}]$. Une première question naturelle est de se demander comment traduire ceci en termes de propriétés sur les cônes de l'éventail. Nous allons répondre à cette question dans ce qui va suivre.

On souhaite donc avoir, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$$[D_i] = \sum_{j=1}^{r} a_{i,j}[D_{n+j}] \tag{3.2}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbf{N}$ pour tous i, j. Ceci équivaut à dire que les diviseurs $D_i - \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} D_{n+j}$ sont principaux pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Rappelons que les diviseurs principaux stables sous l'action du tore de X sont exactement les diviseurs $\mathrm{div}(\chi^u)$ associés aux caractères χ^u du tore de X (voir [F]) pour $u \in M = N^\vee = \mathbf{Z}^n$ donnés par :

$$\mathrm{div}(\chi^u) = \sum_{k=1}^{n+r} \langle u, v_k\rangle D_k.$$

On cherche donc des vecteurs $u_1, ..., u_n \in \mathbf{Z}^n$ tels que pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} \tag{3.3}$$

(i.e $(u_1, ..., u_n)$ est la base duale de $(v_1, ..., v_n)$ au sens des espaces vectoriels) et

$$\langle u_i, v_k\rangle \leqslant 0 \tag{3.4}$$

pour tout $k \in \{n+1, ..., n+r\}$. Ceci implique en particulier que $(v_1, ..., v_n)$ est une famille génératrice d'un cône maximal (i.e. de dimension n) de Δ. En effet, supposons que $C\langle v_1, ..., v_n\rangle$ n'est pas un cône de Δ, alors puisque le vecteur $a = \sum_{i=1}^n v_i$ appartient à un cône de δ (Δ étant complet), on peut écrire

$$a = \sum_{i \in I_1} \alpha_i v_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i v_i$$

avec $\alpha_i > 0$ pour tout i, et $I_1 \subsetneq \{1, ..., n\}$, $I_2 \subset \{n+1, ..., n+r\}$. Soit $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $i_0 \notin I_1$. On a alors

$$\langle u_{i_0}, a\rangle = \sum_{i \in I_2} \alpha_i \langle u_{i_0}, v_i\rangle \leqslant 0,$$

d'après (3.3). Or, par définition de a, $\langle u_{i_0}, a\rangle = 1$, d'où contradiction. Donc $C\langle v_1, ..., v_n\rangle$ est bien un cône maximal de Δ.

Puisque l'on a supposé que X est lisse, $(v_1, ..., v_n)$ est alors une base du réseau $\mathbf{Z}^n$ dont $(u_1, ..., u_n)$ est la base duale (au sens des réseaux). La condition (3.4) impose d'autre part que pour cette base duale $(u_1, ..., u_n)$:

$$\forall k \in \{n+1, ..., n+r\}, \quad \langle u_i, v_k\rangle \leqslant 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ceci soit vérifié est que :

$$v_{n+1}, ..., v_{n+r} \in C\langle -v_1, -v_2, ..., -v_n\rangle$$

où $C\langle -v_1, -v_2, ..., -v_n\rangle$ désigne le cône de $\mathbf{R}^n$ engendré par $-v_1, ..., -v_n$.

Remarque 3.2.2. *Inversement, étant donné un tel éventail, si l'on note*

$$\forall k \in \{1, ..., r\}, \quad v_{n+k} = -\sum_{i=1}^n a_{i,k} v_i,$$

avec $a_{i,k} \in \mathbf{N}$, on obtient alors :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad [D_i] = \sum_{k=1}^r a_{i,k} [D_{n+k}],$$

comme on le souhaite.

3.2.2 Hauteurs sur les hypersurfaces des variétés toriques

Étant donnée une variété torique complète lisse X définie par un éventail Δ à $n+r$ arêtes et un réseau $N = \mathbf{Z}^n$, dont le groupe de Picard et le cône effectif sont engendrés par $[D_{n+1}], ..., [D_{n+r}]$ (cf. section précédente), on considère la classe du diviseur anticanonique de X qui sera de la forme :

$$[-K_X] = \sum_{i=1}^{n+r}[D_i] = \sum_{k=1}^{r} n_k[D_{n+k}],$$

avec, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$,

$$n_k = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}.$$

On considère alors un diviseur de classe $\sum_{k=1}^{r} d_k[D_{n+k}]$, avec $d_1, ..., d_r \in \mathbf{N}$. Une section globale s du fibré en droites associé à ce diviseur sur X permet de définir une hypersurface de X que l'on notera Y. La classe du diviseur anticanonique sur Y sera induite par la classe du diviseur

$$D_0 = \sum_{k=1}^{r}(n_k - d_k)D_{n+k}. \tag{3.5}$$

Nous allons donner une construction de la hauteur associée à $\mathcal{O}(D_0)$ sur X. Pour cela, nous utiliserons la construction des hauteurs sur les variétés toriques décrite par Salberger dans [Sa, §10].

Soit ν une place sur $\mathbf{Q}$, et $|.|_\nu : \mathbf{Q}^* \to \mathbf{R}^+$ la valeur absolue associée. On considère la carte affine de X associée au cône $\{\mathbf{0}\}$ de l'éventail Δ. Cette carte est un ouvert T de X canoniquement égal au tore $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[N])$. L'application $\log|.|_\nu : \mathbf{Q}_\nu^* \to \mathbf{R}$ induit une application

$$L : T(\mathbf{Q}_\nu) \to N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^n.$$

Pour tout $\sigma \in \Delta$, $L^{-1}(-\sigma)$ est un sous-ensemble fermé de $W(\mathbf{Q}_\nu)$. On note alors $C_{\sigma,\nu}$ l'adhérence de $L^{-1}(-\sigma)$ dans $X(\mathbf{Q}_\nu)$. On utilise ces ensembles $C_{\sigma,\nu}$ pour construire une norme $||.||_{D,\nu}$ sur $\mathcal{O}(D)$ pour tout diviseur de Weil D sur X, via la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Soit $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ un diviseur de Weil sur X et s une section locale analytique de $\mathcal{O}(D)$ définie en $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$. Le point $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ appartient à $C_{\sigma,\nu}$ pour un certain $\sigma \in \Delta$. Soit $\chi^{u(\sigma)}$ un caractère sur T représentant le diviseur de Cartier correspondant à D sur U_σ (i.e. $\langle u(\sigma), v_i\rangle = -a_i$ pour tout $v_i \in \sigma(1)$). On pose alors :*

$$||s(P)||_{D,\nu} = |s(P)\chi^{u(\sigma)}(P)|_\nu,$$

et cette expression est indépendante du choix de $\sigma \in \Delta$ tel que $P \in C_{\sigma,\nu}$.

Démonstration. Voir [Sa, Proposition 9.2]. □

On a alors la proposition suivante qui nous sera utile par la suite.

Proposition 3.2.4. *Soit $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ un diviseur de Weil sur X tel que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales. Alors, pour $\sigma \in \Delta_{\max}$, si $\chi^{-u(\sigma)}$ désigne l'unique caractère sur T qui engendre $\mathcal{O}(D)$ sur U_σ (i.e. $\langle -u(\sigma), v_i\rangle = -a_i$ pour tout $v_i \in \sigma(1)$), alors $\chi^{-u(\sigma)}$ s'étend en une section globale de $\mathcal{O}(D)$ et $\chi^{-u(\sigma)}(P) \neq 0$ pour tout $P \in U_\sigma(\mathbf{Q}_\nu)$. Si s est une section locale de $\mathcal{O}(D)$ définie en $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$, alors*

$$||s(P)||_{D,\nu} = \inf_{\sigma\in\Delta_{\max}} |s(P)\chi^{u(\sigma)}(P)|_\nu,$$

où $\Delta_{\max}$ désigne l'ensemble des cônes de Δ de dimension n. De plus, si D est ample et $\sigma \in \Delta_{\max}$, alors $C_{\sigma,\nu}$ est l'ensemble des $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ tels que $|\chi^{u(\sigma)-u(\tau)}(P)|_\nu \leqslant 1$ pour tout $\tau \in \Delta_{\max}$.

Démonstration. Voir [Sa, Proposition 9.8]. □

On peut alors définir la hauteur associée à un diviseur D. Si $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$ est un diviseur de Weil sur X et $P \in X(\mathbf{Q})$, la hauteur associée à D est l'application $H_D : X(\mathbf{Q}) \to [0, \infty[$ définie par

$$H_D(P) = \prod_{\nu\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})} ||s(P)||_{D,\nu}^{-1},$$

où $\mathrm{Val}(\mathbf{Q})$ désigne l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$, et s une section locale de $\mathcal{O}(D)$ définie en P telle que $s(P) \neq 0$.

Remarque 3.2.5. *Comme on peut le voir dans [Sa, Proposition 10.12], pour tout $P \in T(\mathbf{Q})$, $H_D(P)$ ne dépend que de la classe de D dans* $\mathrm{Pic}(X)$.

Par la suite, on notera H la hauteur sur X associée au diviseur D_0 défini par (3.5). Notre objectif sera alors d'évaluer

$$\mathcal{N}_V(B) = \mathrm{Card}\{P \in V(\mathbf{Q}) \cap Y(\mathbf{Q}) \mid H_{D_0}(P) \leqslant B\},$$

pour un certain ouvert dense V de X. Pour évaluer cette quantité, il est plus pratique de se ramener à compter le nombre de points de hauteur bornée sur un torseur universel (voir [Sa, §3] pour la définition de torseurs universels) associé à X. Pour les variétés toriques, la construction du torseur universel est relativement simple et est donnée dans [Sa, §8]. Nous allons rappeler cette construction.

On considère le réseau $N_0 = \mathbf{Z}^{n+r}$ et $M_0 = N_0^\vee = \mathbf{Z}^{n+r}$. À tout générateur v_i d'une arête de l'éventail Δ on associe l'élément e_i de la base canonique de $N_0 = \mathbf{Z}^{n+r}$. On pose alors $N_1 = N_0$ et Δ_1 l'éventail constitué de tous les cônes engendrés par les e_i. La variété torique X_1 déterminée par (N_1, Δ_1) est alors l'espace affine $\mathbf{A}^{n+r}$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, on note d'autre part σ_0 le cône de $N_{0,\mathbf{R}}$ engendré par les e_i pour i tel que $v_i \in \sigma$. Les cônes σ_0 ainsi associés forment alors un éventail régulier Δ_0 de $N_{0,\mathbf{R}}$ (cf. [Sa, Proposition 8.4]), et (Δ_0, N_0) définit une variété torique X_0 qui est un ouvert de X_1. Soit $U_{0,\sigma} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[S_{\sigma_0}])$ où $S_{\sigma_0} = \sigma_0^\vee \cap M_0$. Les morphismes toriques $\pi_\sigma : U_{0,\sigma} \to U_\sigma$ définies par les applications naturelles de σ_0 sur σ se recollent en un morphisme $\pi : X_0 \to X$ qui est alors un torseur universel sur X (cf. [Sa, Proposition 8.5]).

Étant donné que $X_0 \subset X_1 = \mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{Q}}$ les points de X_0 s'écrivent sous forme de $(n+r)$-uplets de coordonnées $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+r})$. On notera alors pour tout diviseur $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$:

$$\boldsymbol{x}^D = \prod_{i=1}^{n+r} x_i^{a_i}.$$

Remarque 3.2.6. *Si $\sigma \in \Delta$, on note*

$$\underline{\sigma} = \sum_{i \mid v_i \notin \sigma(1)} D_i,$$

alors $U_{0,\sigma}$ est l'ouvert de X_1 déterminé par $\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}} \neq 0$, et donc X_0 est l'ouvert de X_1 défini par :

$$\boldsymbol{x} \in X_0 \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Delta_{\max} \mid \boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}} \neq 0.$$

En rappelant que $D_0 = \sum_{k=1}^{r} (n_k - d_k) D_{n+k}$, on définit alors les diviseurs $D(\sigma)$ associés :

Définition 3.2.7. *Soit $\sigma \in \Delta_{\max}$, et soit $\chi^{u(\sigma)}$ le caractère de U tel que $\chi^{-u(\sigma)}$ engendre $\mathcal{O}(D_0)$ sur U_σ. On pose alors*

$$D(\sigma) = D_0 + \sum_{v_i \in \sigma(1)} \langle -u(\sigma), v_i \rangle D_i.$$

Remarque 3.2.8. *Les diviseurs $D(\sigma)$ ne dépendent que de la classe de D_0 dans* $\mathrm{Pic}(X)$.

Lemme 3.2.9. *Soit $\sigma \in \Delta_{\max}$. Si $\mathcal{O}(D_0)$ est engendré par ses section globales, alors $\chi^{-u(\sigma)}$ s'étend en une section globale de $\mathcal{O}(D_0)$, et $D(\sigma)$ est un diviseur effectif à support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$.*

Démonstration. Voir la démonstration de [Sa, Proposition 8.7.(a)]. $\square$

Proposition 3.2.10. *On suppose qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{O}(mD_0)$ est engendré par ses sections globales. Avec les notation ci-dessus, on a :*

$$\forall \boldsymbol{x} \in X_0(\mathbf{Q}), \;\; H_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}|_\nu.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est directement inspirée de la preuve de [Sa, Proposition 10.14]. On considère un point $\boldsymbol{x} \in X_0(\mathbf{Q})$, $P = \pi(\boldsymbol{x})$, et $\tau \in \Delta_{\max}$ tel que $P \in U_\tau$. On a alors que $\chi^{-u(\tau)}$ est une section locale définie en $P \in U_\tau$, et

$$||\chi^{-u(\tau)}(P)||_{D_0,\nu} = \inf_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\chi^{u(\sigma)-u(\tau)}|_\nu.$$

Remarquons que puisque $P \in U_\tau$, d'après le lemme 3.2.9, $\boldsymbol{x}^{D(\tau)} \neq 0$ (étant donné que $D(\tau)$ est effectif à support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$), et que

$$\frac{\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}}{\boldsymbol{x}^{D(\tau)}} = \chi^{u(\tau)-u(\sigma)}(P).$$

Par conséquent, si s désigne la section locale $\chi^{-u(\tau)}$, on a alors :

$$||s(P)||^{-1}_{D_0,\nu} = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left| \frac{\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}}{\boldsymbol{x}^{D(\tau)}} \right|_\nu .$$

De plus, par la formule du produit, on a

$$\prod_{\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} |\boldsymbol{x}^{D(\tau)}|_\nu = 1.$$

D'où le résultat.

□

Par extension de la construction des variétés toriques par les éventails, il est possible de construire une variété $\tilde{X}$ sur $\mathbf{Z}$ par recollement des ouverts affines $\tilde{U}_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[S_\sigma])$ (voir par exemple [Ma, Chapitre 2]). De la même manière que nous avons construit X_0, on peut construire un $\mathbf{Z}$-torseur universel sur la variété $\tilde{X}$ (voir [Sa, p. 207]). On notera ce torseur $\tilde{\pi} : \tilde{X}_0 \to \tilde{X}$. On considère alors la proposition suivante (issue de [Sa, Proposition 11.3]) :

Proposition 3.2.11. *Soit $\boldsymbol{x} \in X_0(\mathbf{Q})$ qui se relève en un $\mathbf{Z}$-point $\tilde{\boldsymbol{x}}$ de $\tilde{X}_0$ (vérifiant alors $\mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\underline{\sigma}} = 1$). On a alors*

$$H_0(\boldsymbol{x}) = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\tilde{\boldsymbol{x}}^{D(\sigma)}|,$$

où $|.|$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. D'après le lemme 3.2.9, pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, $D(\sigma)$ a un support contenu dans $\bigcup_{v_i \notin \sigma(1)} D_i$. La condition $\mathrm{pgcd}\, \tilde{\boldsymbol{x}}^{\underline{\sigma}} = 1$ implique donc que $\mathrm{pgcd}\, \tilde{\boldsymbol{x}}^{D(\sigma)} = 1$. Par conséquent, on a $\sup_{\tau \in \Delta_{\max}} |\tilde{\boldsymbol{x}}^{D(\tau)}|_p = 1$, et ainsi

$$H_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})} \sup_{\tau \in \Delta_{\max}} |\tilde{\boldsymbol{x}}^{D(\tau)}|_\nu = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\tilde{\boldsymbol{x}}^{D(\sigma)}|.$$

□

Plutôt que de compter les $\mathbf{Q}$-points de hauteur bornée de X, nous allons compter les $\mathbf{Z}$-points de $\tilde{X}_0$ en utilisant le lemme ci-dessous :

Lemme 3.2.12. *Pour $m \in \mathbf{N}$, soient*

$$c(m) = \mathrm{Card}\{P \in T(\mathbf{Q}) \mid H(P) = m\},$$

$$c_0(m) = \mathrm{Card}\{P \in \tilde{X}_0 \cap T_0(\mathbf{Q}) \mid H_0(P_0) = m\}$$

(où $T_0 = \pi^{-1}(T)$). Alors $c(m) = c_0(m)/2^r$.

Démonstration. Voir la démonstration de [Sa, Lemme 11.4.a)]. □

Ainsi, étant donné un ouvert de Zariski V de X, si l'on note

$$\mathcal{N}_{0,V}(B) = \mathrm{Card}\{P_0 \in \tilde{Y}_0(\mathbf{Z}) \cap T_0(\mathbf{Q}) \cap \pi^{-1}(V) \mid H_0(P_0) \leqslant B\}$$

(où $\tilde{Y}_0$ est l'hypersurface de $\tilde{X}_0$ correspondant à l'hypersurface Y de X), on a alors

$$\mathcal{N}_V(B) = \mathcal{N}_{0,V}(B)/2^r.$$

Nous chercherons donc dorénavant à évaluer $\mathcal{N}_{0,V}(B)$.

3.2.3 Cas des variétés toriques à $n+2$ générateurs

On considère $n+2$ vecteurs $v_0, v_1, ..., v_n, v_{n+1} \in \mathbf{Z}^n$ tels que $(v_1, ..., v_n)$ forme une base de $\mathbf{Z}^n$ et

$$\begin{cases} v_0 = -\sum_{i=1}^r v_i - \sum_{i=r+1}^m a_i v_i \\ v_{n+1} = -\sum_{i=r+1}^n v_i, \end{cases}$$

où $1 \leqslant r \leqslant m \leqslant n$, et $a_i \in \mathbf{Z}$. On pose alors $I = \{0, ..., r\}$ et $J = \{r+1, ..., n+1\}$. On considère alors l'éventail Δ défini par les cônes maximaux :

$$\sigma_{i,j} = C\langle (v_k)_{\substack{k \in I \\ k \neq i}}, (v_l)_{\substack{l \in J \\ l \neq j}} \rangle$$

pour tous $i \in I$ et $j \in J$. D'après [K, Théorème 1], nous savons que toute variété torique complète lisse dont l'éventail Δ admet $n+2$ arêtes est isomorphe à une variété torique de ce type pour un certain $(r, m, (a_i)_{i \in \{r+1,...,m\}})$ fixé.

Dans ce qui va suivre, nous nous intéresserons exclusivement à la sous-famille de ces variétés définies par $a_{r+1} = ... = a_m = 1$ de sorte que $v_0 = -\sum_{i=1}^m v_i$. Pour cette sous-famille, les hypersurfaces considérées auront la particularité d'être définies par des polynômes homogènes en certaines variables, ce qui sera utile pour pouvoir appliquer les méthodes de différentiations utilisées par Schindler dans [Sch1] et [Sch2].

Remarquons à présent que dans ce cas précis, d'après les résultats obtenus dans la section 3.2.1, si, pour tout $i \in \{0,1,...,n\}$, D_i désigne le diviseur associé à v_i, on a :

$$\begin{array}{ccc}
[D_1]=[D_0] & [D_{r+1}]=[D_0]+[D_{n+1}] & [D_{m+1}]=[D_{n+1}] \\
[D_2]=[D_0] & [D_{r+2}]=[D_0]+[D_{n+1}] & [D_{m+2}]=[D_{n+1}] \\
\dots & \dots & \dots \\
[D_r]=[D_0] & [D_m]=[D_0]+[D_{n+1}] & [D_n]=[D_{n+1}]
\end{array}$$

La classe du diviseur anticanonique de X est alors donné par (cf. [F])

$$[-K_X]=\sum_{i=0}^{n+1}[D_i]=(m+1)[D_0]+(n-r+1)[D_{n+1}].$$

Considérons à présent une hypersurface Y de X donnée par une section globale s de $\mathcal{O}(D)$ où D désigne le diviseur $d_1D_0+d_2D_{n+1}$. Le diviseur anticanonique de Y est alors le diviseur induit par

$$(m+1-d_1)[D_0]+(n-r+1-d_2)[D_{n+1}].$$

Remarque 3.2.13. *Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la diviseur anticanonique de Y appartient à l'intérieur du cône effectif. Ce qui revient à dire, d'après ce qui précède que $m+1>d_1$ et $n-r+1>d_2$. Par ailleurs, pour des raisons pratiques quant à la définition de la hauteur, nous supposerons également que $m+r-n-d_1+d_2 \geqslant 1$.*

D'autre part, les sections globales de $\mathcal{O}(D)$ sont données par (cf. [F, §3.4]) :

$$\Gamma(X,\mathcal{O}(D))=\bigoplus_{u\in P_D\cap \mathbf{Z}^n}\mathbf{C}.\chi^u,$$

où χ^u est le caractère associé à u, et P_D le polytope :

$$P_D=\{u\in\mathbf{Z}^n \mid \forall k\in\{1,...,n\},\ \langle u,v_k\rangle\geqslant 0,$$
$$\langle u,v_0\rangle\geqslant -d_1 \text{ et } \langle u,v_{n+1}\rangle\geqslant -d_2\}$$

Chaque section (à coefficients rationnels) $s=\sum_{u\in P_D\cap\mathbf{Z}^n}\alpha_u\chi^u$ où $\alpha_u\in\mathbf{Q}$ définit une hypersurface Y (que l'on suppose lisse) de X, et se relève en une fonction $f:\tilde{X}_0\to\mathbf{R}$ définie par pour tous $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Q}^{n+2}$ tels que $x_0\neq 0$ et $z_{n+1}\neq 0$:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\sum_{u\in P_D\cap\mathbf{Z}^n}\alpha_u\prod_{i=0}^{r}x_i^{\langle u,v_i\rangle}\prod_{j=r+1}^{m}y_j^{\langle u,v_j\rangle}\prod_{k=m+1}^{n+1}z_k^{\langle u,v_k\rangle}.$$

L'hypersurface de $\tilde{X}_0$ définie par l'annulation de cette fonction correspond alors au torseur universel au-dessus de Y. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.2.12, on a que les $\mathbf{Q}$-points de Y correspondent (modulo l'action des points de torsion de T_{NS}) aux $\mathbf{Z}$-points $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de $\tilde{X}_0$ tels que $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ où F est le polynôme :

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = x_0^{d_1} z_{n+1}^{d_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$= \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u \left(x_0^{d_1 + \langle u, v_0 \rangle} z_{n+1}^{d_2 + \langle u, v_{n+1} \rangle} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\langle u, v_i \rangle} \prod_{j=r+1}^{m} y_j^{\langle u, v_j \rangle} \prod_{k=m+1}^{n} z_k^{\langle u, v_k \rangle} \right)$$

Remarque 3.2.14. – *On remarque que le polynôme ainsi défini est de degré homogène égal à d_1 en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et de degré homogène d_2 en $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, c'est-à-dire, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$:*

$$F(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda\mu \boldsymbol{y}, \mu \boldsymbol{z}) = \lambda^{d_1} \mu^{d_2} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

En effet le degré de chaque monôme en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est

$$d_1 + \langle u, v_0 \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle u, v_i \rangle = d_1,$$

car $v_0 = -\sum_{i=1}^{m} v_i$, et de même pour $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

– *Réciproquement on peut voir que tout polynôme en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de degré homogène d_1 en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et de degré homogène d_2 en $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est un polynôme correspondant à une unique section globale s de $\mathcal{O}(D)$.*

Remarque 3.2.15. *Dans tout ce qui va suivre on supposera que l'hypersurface Y définie par $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ est lisse. En fait cette propriété est vraie pour un ouvert dense de Zariski de coefficients $(\alpha_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}$. En effet on réalise un plongement de X dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$ en considérant l'application f qui à $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ associe la classe de*

$$\left((x_0^{d_1 + \langle u, v_0 \rangle} z_{n+1}^{d_2 + \langle u, v_{n+1} \rangle} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\langle u, v_i \rangle} \prod_{j=r+1}^{m} y_j^{\langle u, v_j \rangle} \prod_{k=m+1}^{n} z_k^{\langle u, v_k \rangle} \right)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Bertini (cf. [Ha]), pour une famille ouverte dense d'hyperplans projectifs $H_{\boldsymbol{\alpha}} = \{(X_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \mid \sum_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n} \alpha_u X_u = 0\} \subset \mathbf{P}^N$, on a que $X \cap H_{\boldsymbol{\alpha}}$ est lisse. Or on remarque que $X \cap H_{\boldsymbol{\alpha}} = Y$ et par conséquent, Y est lisse pour un ouvert dense de coefficients $(\alpha_u)_{u \in P_D \cap \mathbf{Z}^n}$.

Nous allons à présent construire la hauteur sur X associée au diviseur $D_Y = (m + 1 - d_1) D_0 + (n - r + 1 - d_2) D_{n+1}$ (correspondant au diviseur anticanonique sur Y). Comme précédemment, d'après [F, §3.4], les sections globales de $\mathcal{O}(D_Y)$ sont données par :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D_Y)) = \bigoplus_{u \in P_{D_Y} \cap \mathbf{Z}^n} \mathbf{C}.\chi^u,$$

où P_{D_Y} est le polytope :

$$P_{D_Y} = \{u \in \mathbf{Z}^n \mid \forall k \in \{1, ..., n\},\ \langle u, v_k\rangle \geqslant 0,\\ \langle u, v_0\rangle \geqslant m+1-d_1 \text{ et } \langle u, v_{n+1}\rangle \geqslant n-r+1-d_2\}$$

Une base des sections globales est donc donnée par les $(\chi^u)_{u\in P_{D_Y}}$, qui se relèvent en des fonctions $(f_u)_{u\in P_{D_Y}}$ de $\tilde{X}_0$ dans $\mathbf{R}$ qui sont exactement les monômes en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de degrés $(m+1-d_1)$ en $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et de degré $(n-r+1-d_2)$ en $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. La hauteur H associée à D_Y est donc définie sur $\tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}^{n+2}$ par pour tout $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \tilde{X}_0(\mathbf{Z})$; :

$$\begin{aligned} H_0(\boldsymbol{q}) &= \max_{\substack{\forall i,j,k,\ \alpha_i,\beta_j,\gamma_k\in\mathbf{N}\\ \sum_{i=0}^r \alpha_i+\sum_{j=r+1}^m \beta_j=m+1-d_1\\ \sum_{j=r+1}^m \beta_j+\sum_{k=m+1}^{n+1}\gamma_k=n-r+1-d_2}} \prod_{i=0}^r |x_i|^{\alpha_i}\prod_{j=r+1}^m |y_j|^{\beta_j}\prod_{k=m+1}^{n+1}|z_k|^{\gamma_k}\\ &= \max_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{N}\\ \alpha+\beta=m+1-d_1\\ \beta+\gamma=n-r+1-d_2}} |\boldsymbol{x}|^{\alpha}|\boldsymbol{y}|^{\beta}|\boldsymbol{z}|^{\gamma}\\ &= \max\{|\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1}|\boldsymbol{z}|^{n-r+1-d_2}, |\boldsymbol{x}|^{(m+1-d_1)-(n-r+1-d_2)}|\boldsymbol{y}|^{n-r+1-d_2}\}\\ &= |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1}\max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right)^{n-r+1-d_2}. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que dans le cas présent, $\tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}^{n+2}$ peut être décrit comme l'ensemble des $(n+2)$-uplets d'entiers notés $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, avec $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, ..., x_r)$, $\boldsymbol{y} = (y_{r+1}, ..., y_m)$, $\boldsymbol{z} = (z_{m+1}, ..., z_{n+1})$ tels que (cf. [Sa, 11.5]) :

$$\exists \sigma \in \Delta_{\max} \mid\ \boldsymbol{q}^{\underline{\sigma}} \neq 0, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{q}^{\underline{\sigma}}) = 1, \tag{3.7}$$

où

$$\boldsymbol{q}^{\underline{\sigma}} = \prod_{i\notin\sigma(1)} q_i. \tag{3.8}$$

Par la définition de Δ, et des cônes maximaux $(\sigma_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, on observe que :

$$\boldsymbol{q}^{\underline{\sigma_{i,j}}} = \prod_{l\notin\sigma_{i,j}(1)} q_l = q_i q_j.$$

Par conséquent, la condition (3.6) équivaut à :

$$\exists (i,j) \in I\times J \mid q_i q_j \neq 0$$

soit encore

$$\exists i \in I \mid q_i \neq 0, \text{ et } \exists j \in J \mid q_j \neq 0,$$

et donc (3.6) équivaut à :

$$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \neq \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

De même, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}}(\boldsymbol{q}^{\sigma}) &= \operatorname{pgcd}_{(i,j) \in I \times J}(q_i q_j) \\
&= (\operatorname{pgcd}_{i \in I} q_i)(\operatorname{pgcd}_{j \in J} q_j) \\
&= \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{x}) \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),
\end{aligned}$$

et la condition (3.7) équivaut donc à

$$\operatorname{pgcd}(\boldsymbol{x}) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 1. \tag{3.10}$$

Ainsi, calculer

$$\mathcal{N}(B) = \operatorname{card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \mid H(P) \leqslant B\}$$

revient à calculer le nombre de points de

$$\{\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \tilde{X}_0(\mathbf{Z}) \mid H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant B\}.$$

Par ailleurs, quitte à appliquer une inversion de Möbius (en un sens que nous préciserons ultérieurement), on peut se ramener au calcul de

$$\begin{aligned}
N_{d,U}(B) = \operatorname{card}\big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}),& \\
F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0,\ H_d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leqslant B\}&
\end{aligned}$$

pour un certain ouvert U que nous préciserons ultérieurement, et pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, avec

$$H_d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1} \max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right)^{n-r+1-d_2}. \tag{3.11}$$

Dans ce qui va suivre nous allons donc chercher à obtenir une formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$.

3.3 Première étape

Nous allons établir une formule asymptotique pour $N_{U,d}(B)$, pour un $d \in \mathbf{N}^*$ fixé, en nous inspirant de la méthode décrite par Schindler dans

[Sch1] et [Sch2]. L'idée générale est de considérer la fonction $h_d : \mathbf{N}^2 \to [0, \infty[$ définie par

$$(3.12)\quad h_d(k,l) = \mathrm{card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid |\boldsymbol{x}| = k, \\ \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right) = l \ \text{ et } \ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\Big\}$$

(où U est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}^{n+2}$ que nous préciserons ultérieurement), de donner des formules asymptotiques pour

$$\sum_{k \leqslant P_1} \sum_{l \leqslant P_2} h_d(k,l), \quad \sum_{k \leqslant P_1} h_d(k,l) \ \text{ et } \ \sum_{l \leqslant P_2} h_d(k,l),$$

afin de pouvoir appliquer un résultat de Blomer et Brüdern (voir [B-B]) pour en déduire une formule asymptotique pour

$$\sum_{k^{m+1-d_1} l^{n-r+1-d_2} \leqslant B} h_d(k,l) \sim_{B \to \infty} N_{U,d}(B).$$

Dans cette première partie, pour des réels $P_1, P_2 \geqslant 1$ fixés, nous allons chercher à calculer

$$(3.13)\quad N_d(P_1,P_2) = \mathrm{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (P_1\mathcal{B}_1 \times dP_1P_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{n+2} \mid \\ |\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}|P_2 \ \text{ et } \ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\},$$

où $\mathcal{B}_1 = [-1,1]^{r+1}$, $\mathcal{B}_2 = [-1,1]^{m-r}$, $\mathcal{B}_3 = [-1,1]^{n-m+1}$. Plus précisément, en notant $\tilde{d} = d_1 + d_2 - 2$, nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Pour, $P_1 = P_2^b$ avec $b \geqslant 1$, si $d_1 \geqslant 2$ et si l'on suppose que, $K = (n + 2 - \max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} - \varepsilon)/2^{\tilde{d}}$ est tel que*

$$K > \max\{bd_1 + d_2, (5b+2)(d_1 + d_2 - 1)\},$$

on a alors

$$N_d(P_1,P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2} \\ + O\left(d^{m-r} \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

pour un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Le facteur σ_d étant une constante (ne dépendant que de d) que nous préciserons (voir la formule (3.63)). Ceci nous permettra plus tard d'obtenir une formule pour $\sum_{k \leqslant P_1} \sum_{l \leqslant P_2} h_d(k,l)$.

3.3.1 Une inégalité de Weyl

Dans toute cette partie nous allons supposer $1 \leqslant P_2 \leqslant P_1$. On notera donc $P_1 = P_2^b$ avec $b \geqslant 1$. Nous allons évaluer $N_d(P_1, P_2)$ en nous inspirant de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Pour cela, on introduit la fonction génératrice définie par

$$S_d(\alpha) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{r+1}\\ |\boldsymbol{x}|\leqslant P_1}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{m-r}\\ |\boldsymbol{y}|\leqslant d|\boldsymbol{x}|P_2}} \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n-m+1}\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant P_2}} e(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{3.14}$$

pour $\alpha \in [0,1]$, et où e désigne la fonction $x \mapsto \exp(2i\pi x)$. On remarque alors que

$$N_d(P_1, P_2) = \int_0^1 S_d(\alpha)\boldsymbol{d}\alpha.$$

Étant donnés $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^{m-r}$, on constate que

$$|\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}|P_2 \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}| \geqslant \frac{|\boldsymbol{y}|}{dP_2} \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}| \geqslant \left\lceil \frac{|\boldsymbol{y}|}{dP_2} \right\rceil.$$

En posant $N = \left\lceil \frac{|\boldsymbol{y}|}{dP_2} \right\rceil$ (ce qui équivaut à dire que $|\boldsymbol{y}| \in]d(N-1)P_2, dNP_2]$), on remarque que $S(\alpha)$ peut être réexprimé sous la forme :

$$S_d(\alpha) = \sum_{N=1}^{P_1} S_{d,N}(\alpha),$$

où

$$S_{d,N}(\alpha) = \sum_{N\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant P_1} \sum_{d(N-1)P_2<|\boldsymbol{y}|\leqslant dNP_2} \sum_{|\boldsymbol{z}|\leqslant P_2} e(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{3.15}$$

Si

$$\mathcal{E}_N = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^{m-r} \mid d(N-1)P_2 < |\boldsymbol{y}| \leqslant dNP_2\},$$

on remarque que

$$\mathcal{E}_N = \bigcup_{\mathcal{I}\subset\{r+1,\dots,m\}} \mathcal{B}_{N,\mathcal{I}},$$

où

$$\mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_N \mid \forall i \in \mathcal{I},\ y_i \geqslant 0 \text{ et } \forall i \notin \mathcal{I},\ y_i < 0\}.$$

On observe par ailleurs que l'on peut écrire pour tout $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} = \bigcup_{\substack{\mathcal{J}\subset\{r+1,\dots,m\}\\ \mathcal{J}\neq\emptyset}} \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}, \tag{3.16}$$

avec
(3.17)
$\mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}_{N,\mathcal{I}} \mid \forall j \in \mathcal{J},\ |y_j| > d(N-1)P_2 \text{ et } \forall j \notin \mathcal{J},\ |y_j| \leqslant d(N-1)P_2\}.$

On a alors

$$|S_{d,N}(\alpha)| \ll \sum_{\substack{\mathcal{I},\mathcal{J}\subset\{r+1,\dots,m\}\\ \mathcal{J}\neq\emptyset}} |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)| \tag{3.18}$$

où

$$S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha) = \sum_{|\boldsymbol{x}|\leqslant P_1}\ \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}}\ \sum_{|\boldsymbol{z}|\leqslant P_2} e(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{3.19}$$

Par une inégalité de Hölder, on a, pour N fixé

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll P_1^{(r+1)(2^{d_2-1}-1)} \sum_{|\boldsymbol{x}|\leqslant P_1} |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\boldsymbol{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \tag{3.20}$$

où l'on a noté

$$S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\boldsymbol{x}}(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}}\ \sum_{|\boldsymbol{z}|\leqslant P_2} e(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{3.21}$$

Dans ce qui va suivre, nous allons chercher à « linéariser » le polynôme F en appliquant un opérateur Δ défini de la façon suivante : pour tout polynôme f à N variables on pose pour tous $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in \mathbf{R}^N$:

$$\Delta_{\boldsymbol{t}_1} f(\boldsymbol{t}_2) = f(\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2) - f(\boldsymbol{t}_1).$$

Dans ce qui suit, nous appliquons $d_2 - 1$ fois l'opérateur Δ à F en les variables $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, et nous obtenons un polynôme en $d_2(n - r + 1) + r + 1$ variables $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(j)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}$. Puis, en appliquant l'opérateur Δ $d_1 - 1$ fois à ce polynôme en les variables $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(j)})_{j\in\{1,..,d_2\}}$, nous obtenus finalement un polynôme en $(r + 1)d_1 + (m - r)d_1d_2 + (n - m + 1)d_2$ variables du type $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,..,d_2\}}}$ de la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma_d^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,..,d_2\}}}\right) + G_1\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,..,d_2\}}}\right)&\\ + G_2\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,..,d_2-1\}}}\right)&\end{aligned}$$

où G_1 (resp. G_2) est indépendant de $(\boldsymbol{x}^{(d_1)}, \boldsymbol{y}^{(j,d_1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}$ (resp. $(\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}, \boldsymbol{z}^{(d_2)})_{i\in\{1,\dots,d_1\}}$), et $\Gamma_d^{(1)}$ est linéaire en $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}$ pour tout

$i \in \{1, ..., d_1\}$ et linéaire en $(\boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{i\in\{1,...,d_1\}}$ pour tout $j \in \{1, ..., d_2\}$.

Pour $N, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ fixés, posons

$$\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} = \mathcal{C}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} \times P_2\mathcal{B}_3 \subset dP_1P_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3,$$

et on définit

$$\mathcal{U}^D_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} = \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}},$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(t)}, \boldsymbol{z}^{(t)}))\\ &\qquad = \bigcap_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_t)\in\{0,1\}^t} (\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}} - \varepsilon_1(\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}) - ... - \varepsilon_t(\boldsymbol{y}^{(t)}, \boldsymbol{z}^{(t)})).\end{aligned}$$

Si l'on note $\mathcal{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (pour $\boldsymbol{x}$ fixé), et

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_t((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(t)}, \boldsymbol{z}^{(t)}))\\ &\qquad = \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_t)\in\{0,1\}^t} (-1)^{\varepsilon_1+...+\varepsilon_t}\mathcal{F}(\varepsilon_1(\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}) + ... + \varepsilon_t(\boldsymbol{y}^{(t)}, \boldsymbol{z}^{(t)})),\end{aligned} \tag{3.22}$$

en utilisant l'équation (11.2) de [Schm], on obtient la majoration

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\boldsymbol{x}}|^{2^{d_2-1}} \ll |\mathcal{U}^D_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}|^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{(\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)})\in\mathcal{U}^D_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}} \cdots \sum_{(\boldsymbol{y}^{(d_2-2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-2)})\in\mathcal{U}^D_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}}$$

$$\left| \sum_{\substack{(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)})\\ \in\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-2)}))}} e(\mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-1)}))) \right|^2$$

que l'on peut encore majorer par

$$((dP_1P_2)^{m-r}P_2^{n-m+1})^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{\substack{|\boldsymbol{y}^{(1)}|\leqslant 2dP_1P_2\\ |\boldsymbol{z}^{(1)}|\leqslant 2P_2}} \cdots \sum_{\substack{|\boldsymbol{y}^{(d_2-2)}|\leqslant 2dP_1P_2\\ |\boldsymbol{z}^{(d_2-2)}|\leqslant 2P_2}}$$

$$\left| \sum_{\substack{(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)})\\ \in\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-2)}))}} e(\mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-1)}))) \right|^2$$

On remarque que pour tous $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), (\boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in \mathcal{U}_{N,I,J}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(d_2-2)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-2)}))$ on a :

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'))\\ &= \mathcal{F}_{d_2}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(d_2)}, \boldsymbol{z}^{(d_2)}) - \mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}), ..., (\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-1)})),\end{aligned}$$

pour

$$(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)})\in\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-2)}))^D$$

et

$$(\boldsymbol{y}^{(d_2)},\boldsymbol{z}^{(d_2)})\in\mathcal{U}_{N,\mathcal{I},\mathcal{J}}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)})),$$

donnés par :

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}^{(d_2)},\boldsymbol{z}^{(d_2)}),$$
$$(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')=(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}+\boldsymbol{y}^{(d_2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}+\boldsymbol{z}^{(d_2)}).$$

On obtient donc la majoration :

(3.23)
$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J},\boldsymbol{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}}\ll(d^{m-r}P_1^{m-r}P_2^{n-r+1})^{2^{d_2-1}-d_2}\sum_{\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}}\cdots\sum_{\boldsymbol{y}^{(d_2-2)},\boldsymbol{z}^{(d_2-2)}}$$
$$\sum_{\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}}\sum_{\boldsymbol{y}^{(d_2)},\boldsymbol{z}^{(d_2)}}e(\mathcal{F}_{d_2}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2)},\boldsymbol{z}^{(d_2)}))$$
$$-\mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}))).$$

où chaque $\boldsymbol{y}^{(i)}$ (resp. $\boldsymbol{z}^{(i)}$) appartient à une union de boîtes de taille au plus dP_1P_2 (resp. P_2).

D'après [Schm][Lemme 11.4], on a que

$$\mathcal{F}_{d_2}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2},\boldsymbol{z}^{(d_2)}))-\mathcal{F}_{d_2-1}((\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)}),...,(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}))$$
$$=\alpha F_1(d\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{z}})+\alpha F_2(d\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}).$$

où l'on a noté

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}=(\boldsymbol{y}^{(1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2)})\quad\widetilde{\boldsymbol{z}}=(\boldsymbol{z}^{(1)},...,\boldsymbol{z}^{(d_2)})$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}=(\boldsymbol{y}^{(1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2-1)})\quad\hat{\boldsymbol{z}}=(\boldsymbol{z}^{(1)},...,\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}).$$

avec F_1 est une forme multilinéaire en $(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{z}})$ de la forme :

$$\sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,...,i_{d_2})\in\{r+1,...,n+1\}^{d_2}}E_{\boldsymbol{i}}(d\boldsymbol{x})t_{i_1}^{(1)}...t_{i_{d_2}}^{(d_2)}$$

où

$$t_i^{(j)}=\begin{cases}y_i^{(j)} & \text{si}\quad i\in\{r+1,...,m\}\\ z_i^{(j)} & \text{si}\quad i\in\{m+1,...,n+1\}\end{cases}\tag{3.24}$$

pour tout $j\in\{1,...,d_2\}$, et $E_{\boldsymbol{i}}(d\boldsymbol{x})$ tel que pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_{d_2}$,

$$E_{(\sigma(i_1),...,\sigma(i_{d_2}))}(d\boldsymbol{x})=E_{\boldsymbol{i}}(d\boldsymbol{x}).$$

Remarquons par ailleurs que F_1 et F_2 sont homogènes de degré d_1 en $(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{y}})$.

Pour $\widetilde{\boldsymbol{z}} \in [-P_2, P_2]^{d_2(n-m+1)}$ fixé, on note

$$S_{d,\widetilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha) = \sum_{|\boldsymbol{x}|\leqslant P_1} \sum_{\boldsymbol{y}^{(1)},\dots,\boldsymbol{y}^{(d_2)}} e(\alpha F_1(d\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{\boldsymbol{z}}) + \alpha F_2(d\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})),$$

et d'après les formules (3.20) et (3.23), on obtient

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{d_2-1}-1} \left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{d_2-1}-d_2} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{d_2-1}-d_2} \sum_{|\widetilde{\boldsymbol{z}}|\leqslant P_2} |S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|.$$

En posant $\tilde{d} = d_1 + d_2 - 2$, on en déduit :

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-2^{d_1-1}} \left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2 2^{d_1-1}} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2 2^{d_1-1}} \left(\sum_{|\tilde{\boldsymbol{z}}|\leqslant P_2} |S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|\right)^{2^{d_1-1}}. \tag{3.25}$$

Par une inégalité de Hölder, on a

$$\left(\sum_{|\widetilde{\boldsymbol{z}}|\leqslant P_2} |S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|\right)^{2^{d_1-1}} \ll \left(P_2^{d_2(n-m+1)}\right)^{2^{d_1-1}-1} \sum_{|\widetilde{\boldsymbol{z}}|\leqslant P_2} |S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}},$$

et ainsi (3.25) devient

$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-2^{d_1-1}} \left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2 2^{d_1-1}} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2} \sum_{|\widetilde{\boldsymbol{z}}|\leqslant P_2} |S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}}. \tag{3.26}$$

Par ailleurs, en appliquant le procédé de différenciation précédent à $S_{d,\tilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)$, on obtient :

$$\begin{aligned}|S_{d,\widetilde{\boldsymbol{z}}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll{}& \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{d_1-1}-d_1} \left((dP_1P_2)^{d_2(m-r)}\right)^{2^{d_1-1}-d_1} \\ & \sum_{|\boldsymbol{x}^{(1)}|\leqslant P_1} \sum_{|\boldsymbol{y}^{(1,1)}|\leqslant dP_1P_2} \cdots \sum_{|\boldsymbol{y}^{(d_2,1)}|\leqslant dP_1P_2} \sum_{|\boldsymbol{x}^{(2)}|\leqslant P_1} \\ & \sum_{|\boldsymbol{y}^{(1,2)}|\leqslant dP_1P_2} \cdots \sum_{|\boldsymbol{x}^{(d_1)}|\leqslant P_1} \sum_{|\boldsymbol{y}^{(1,d_1)}|\leqslant dP_1P_2} \cdots \sum_{|\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}|\leqslant dP_1P_2} \\ & e\left(\sum_{i=1,2} \mathcal{F}_{d_1}^{(i)}((\boldsymbol{x}^{(1)}, (\boldsymbol{y}^{(j,1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}), \dots, (\boldsymbol{x}^{(d_2)}, (\boldsymbol{y}^{(j,d_1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}))\right. \\ & \left. -\mathcal{F}_{d_1-1}^{(i)}((\boldsymbol{x}^{(1)}, (\boldsymbol{y}^{(j,1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}), \dots, (\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}, (\boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}))\right),\end{aligned}$$

où pour $i \in \{1,2\}$, $\mathcal{F}_k^{(i)}$ désigne la forme de (3.22) associée à $\mathcal{F}(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \alpha F_i(d\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{z}})$ pour un $\widetilde{\boldsymbol{z}}$ fixé. On remarque que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{d_1}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)-\mathcal{F}_{d_1-1}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\\
&=\Gamma_d^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)+g_d\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)
\end{aligned}$$

où $\Gamma_d^{(1)}$ est une forme linéaire en $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{j\in\{1,...,d_2\}}$ pour chaque $i \in \{1,...,d_1\}$, de la forme

$$\alpha \sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,...,i_{d_1})\in I^{d_1}} G_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1}}^{(d_1)} \tag{3.27}$$

avec

$$I=\{0,1,...r\}\cup\{(r+1,1),...(m,1)...(r+1,d_2),...,(m,d_2)\},$$

$$u_i^{(j)}=\begin{cases} x_i^{(j)} & \text{si} \quad i\in\{0,1,...,r\}\\ y_k^{(l,j)} & \text{si} \quad i=(k,l)\in\{r+1,...m\}\times\{1,...,d_2\}\end{cases} \tag{3.28}$$

avec $G_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})\in\mathbf{Z}[d,\widetilde{\boldsymbol{z}}]$ symétrique en $\boldsymbol{i}$ et dont le degré en d est

$$f_{\boldsymbol{i}}=\operatorname{card}\{k\in\{1,...,d_1\}\mid i_k\in\{0,...,r\}\}$$

et on peut donc écrire

$$G_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})=d^{f_{\boldsymbol{i}}}G_{\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})$$

avec $G_{\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})$ symétrique en $\boldsymbol{i}$.

D'autre part, on remarque que puisque F_2 ne dépendait que de $\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}$, la partie

$$\mathcal{F}_{d_1}^{(2)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)-\mathcal{F}_{d_1-1}^{(2)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)$$

est en fait un polynôme en $\tilde{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{z}},(\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}$ de la forme

$$\Gamma_d^{(2)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)+h_d\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)$$

où $\Gamma_d^{(2)}$ est une forme linéaire en $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{j\in\{1,...,d_2-1\}}$ pour tout $i\in\{1,...,d_1\}$, de la forme

$$\alpha \sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,...,i_{d_1})\in(I')^{d_1}} H_{d,\boldsymbol{i}}(\tilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1}}^{(d_1)}$$

avec $I' = \{0,1,...r\} \cup \{(r+1,1),...(m,1)...(r+1,d_2-1),...,(m,d_2-1)\}$. On observe en particulier que $\Gamma_d^{(2)}$ est indépendant de $(\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}, \boldsymbol{z}^{(d_2)})_{i\in\{1,...,d_1\}}$. En regroupant les résultats obtenus on trouve

$$(3.29)\quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_1} \left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_1d_2} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2} \sum_{\tilde{\boldsymbol{z}}} \sum_{\substack{(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}} \\ j\in\{1,...,d_2\}}} \left| \sum_{\boldsymbol{x}^{(d_1)},\boldsymbol{y}^{(1,d_1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}} e\left(\Gamma_d^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) + \Gamma_d^{(2)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)\right)\right|.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de faire la remarque suivante :

Lemme 3.3.2. *Remarquons que si l'on avait différencié la forme F en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ puis en $(\tilde{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z})$ plutôt qu'en $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ puis en $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})$, on aurait obtenu :*

$$(3.30)\quad |S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_1} \left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_1d_2} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2} \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \sum_{\substack{(\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})\ i\in\{1,...,d_1\} \\ j\in\{1,...,d_2-1\}}} \left| \sum_{\boldsymbol{z}^{(d_2)},\boldsymbol{y}^{(d_2,1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}} e\left(\Gamma_d^{(1)'}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) + \Gamma_d^{(2)'}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right)\right|,$$

avec la propriété $\Gamma_d^{(1)'} = \Gamma_d^{(1)}$.

Démonstration. On pose

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbf{N}\\ m_1+m_2=d_1\\ m_2+m_3=d_2}} \sum_{\substack{\boldsymbol{i}\in\{0,...,r\}^{m_1}\\ \boldsymbol{j}\in\{r+1,...,m\}^{m_2}\\ \boldsymbol{k}\in\{m+1,...,n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} x_{i_1}...x_{i_{m_1}} y_{j_1}...y_{j_{m_2}} z_{k_1}...z_{k_{m_3}},$$

(avec $\alpha_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ symétrique en $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$). La forme multilinéaire $F_1(d\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}},\tilde{\boldsymbol{z}})$ précédente est alors

$$(-1)^{d_2} \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbf{N}\\ m_1+m_2=d_1\\ m_2+m_3=d_2}} d^{m_1} m_2! m_3! \sum_{\substack{\boldsymbol{i}\in\{0,...,r\}^{m_1}\\ \boldsymbol{j}\in\{r+1,...,m\}^{m_2}\\ \boldsymbol{k}\in\{m+1,...,n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} x_{i_1}...x_{i_{m_1}} \sum_{\sigma\in\mathcal{M}(d_2,m_2)} y_{j_1}^{(\sigma(1))}...y_{j_{m_2}}^{(\sigma(m_2))} z_{k_1}^{(\sigma(m_2+1))}...z_{k_{m_3}}^{(\sigma(m_2+m_3))}$$

où $\mathcal{M}(d_2,m_2)$ désigne l'ensemble des permutations σ de $\{1,...,d_2\}$ telles que $\sigma(1)<\sigma(2)<...<\sigma(m_2)$ et $\sigma(m_2+1)<\sigma(m_2+2)<...<\sigma(m_2+m_3)=\sigma(d_2)$. La forme multilinéaire $\Gamma_d^{(1)}$ obtenue en différenciant en $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})$ est alors

$$(-1)^{d_1+d_2}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbf{N}\\ m_1+m_2=d_1\\ m_2+m_3=d_2}} d^{m_1}m_1!(m_2!)^2m_3! \sum_{\substack{\boldsymbol{i}\in\{0,...,r\}^{m_1}\\ \boldsymbol{j}\in\{r+1,...,m\}^{m_2}\\ \boldsymbol{k}\in\{m+1,...,n+1\}^{m_3}}} \alpha_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} \sum_{\tau\in\mathcal{M}(d_1,m_1)}\sum_{\sigma\in\mathcal{M}(d_2,m_2)}$$
$$x_{i_1}^{(\tau(1))}...x_{i_{m_1}}^{(\tau(m_1))}y_{j_1}^{(\sigma(1),\tau(m_1+1))}...y_{j_{m_2}}^{(\sigma(m_2),\tau(m_1+m_2))}z_{k_1}^{(\sigma(m_2+1))}...z_{k_{m_3}}^{(\sigma(m_2+m_3))}$$

Il est alors clair que l'on obtient le même résultat en différenciant en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ puis en $(\tilde{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z})$. □

On remarque que, pour $\widetilde{\boldsymbol{z}}$ et $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}$ fixés si l'on note $\Gamma_d=\Gamma_d^{(1)}+\Gamma_d^{(2)}$:

$$\left|\sum_{\boldsymbol{x}^{(d_1)},\boldsymbol{y}^{(1,d_1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}} e\left(\Gamma_d\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right)\right| \tag{3.31}$$
$$=\prod_{i\in I}\left|\sum_{u_i^{(d_1)}} e\left(\alpha u_i^{(d_1)}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1}\mid i_{d_1}=i} G_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}+\sum_{\boldsymbol{i}'\in(I')^{d_1}\mid i'_{d_1}=i} H_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})u_{i'_1}^{(1)}...u_{i'_{d_1-1}}^{(d_1-1)}\right)\right)\right|$$

où la somme sur $u_i^{(d_1)}$ porte sur $u_i^{(d_1)}$ appartenant à un intervalle de taille $O(P_1)$ si $i\in\{0,...,r\}$ et de taille $O(dP_1P_2)$ pour

$$i\in\{(r+1,1),...(m,1)...(r+1,d_2),...,(m,d_2)\}.$$

Pour simplifier les notations on pose

$$\gamma_{d,i}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1}\mid i_{d_1}=i} G_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \tag{3.32}$$

$$\gamma_{d,i}^{(2)}\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}'\in(I')^{d_1}\mid i'_{d_1}=i} H_{d,\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{z}})u_{i'_1}^{(1)}...u_{i'_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \tag{3.33}$$

où les $u_i^{(j)}$ sont les variables définies par (3.28), et

$$\gamma_{d,i}=\gamma_{d,i}^{(1)}+\gamma_{d,i}^{(2)} \tag{3.34}$$

En notant pour tout réel x

$$||x|| = \inf_{m\in\mathbf{Z}} |x-m|,$$

et en considérant la majoration

$$\sum_{m\in I(P)\cap\mathbf{Z}} e(\beta m) \ll \min\{P, ||\beta||^{-1}\}$$

pour tout intervalle $I(P)$ de taille $O(P)$ avec $P \geqslant 1$, on peut alors majorer (3.31) par :

$$\prod_{i\in I} \min\left(H_i, \left|\left|\alpha\gamma_{d,i}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(j,k)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right|\right|^{-1}\right)$$

où

$$H_i = \begin{cases} P_1 & \text{si} \quad i \in \{0,1,...,r\} \\ dP_1P_2 & \text{si} \quad i=(k,l)\in\{r+1,...m\}\times\{1,...,d_2\}. \end{cases}$$

Pour tout $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(\mathbf{N}\cap[0,H_i[)$, et pour $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}$ fixés, on note $\mathcal{A}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}, \boldsymbol{r}\right)$, l'ensemble des éléments $\boldsymbol{z}^{(d_2)}, \boldsymbol{y}^{(d_2,1)}, ..., \boldsymbol{y}^{(d_2,d_1-1)}$ tels que $|\boldsymbol{z}^{(d_2)}| \leqslant P_2$, $|\boldsymbol{y}^{(d_2,k)}| \leqslant dP_1P_2$ pour tout $k \in \{1,...,d_1-1\}$ et

$$\forall i \in I, \quad r_iH_i^{-1} \leqslant \left\{\alpha\gamma_{d,i}\left((\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(j,k)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right\} < (r_i+1)H_i^{-1}$$

et $A\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}, \boldsymbol{r}\right)$ le cardinal de cet ensemble. On a alors l'estimation

(3.35)

$$\sum_{\boldsymbol{z}^{(d_2)}, \boldsymbol{y}^{(d_2,1)}, ..., \boldsymbol{y}^{(d_2,d_1-1)}} \left| \sum_{\boldsymbol{x}^{(d_1)}, \boldsymbol{y}^{(1,d_1)}, ..., \boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}} e\left(\Gamma_d\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right)\right|$$
$$\ll \sum_{\boldsymbol{r}} A\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}, \boldsymbol{r}\right) \prod_{i\in I} \min\left(H_i, \max\left(\frac{H_i}{r_i}, \frac{H_i}{H_i-r_i-1}\right)\right).$$

Par ailleurs, si

$$(\boldsymbol{z}^{(d_2)}, (\boldsymbol{y}^{(d_2,i)})_{i\in\{1,...d_1-1\}}), (\boldsymbol{z}'^{(d_2)}, (\boldsymbol{y}'^{(d_2,i)})_{i\in\{1,...d_1-1\}})$$
$$\in \mathcal{A}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}, \boldsymbol{r}\right),$$

on a alors, pour tout $i \in I$:

$$\begin{aligned}\gamma_{d,i}&\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\boldsymbol{z}^{(d_2)},(\boldsymbol{y}^{(d_2,k)})_{k\in\{1,...d_1-1\}}\right)\\ &-\gamma_{d,i}\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\boldsymbol{z}'^{(d_2)},(\boldsymbol{y}'^{(d_2,k)})_{k\in\{1,...d_1-1\}}\right)\\ &\qquad=\gamma_{d,i}^{(1)}\Big((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\\ &\qquad\qquad\boldsymbol{z}^{(d_2)}-\boldsymbol{z}'^{(d_2)},(\boldsymbol{y}^{(d_2,k)}-\boldsymbol{y}'^{(d_2,k)})_{k\in\{1,...d_1-1\}}\Big)\end{aligned}$$

(car $\gamma_{d,i}^{(2)}$ ne dépend pas de $(\boldsymbol{z}^{(d_2)},(\boldsymbol{y}^{(d_2,k)})_{k\in\{1,...d_1-1\}})$ et $\gamma_{d,i}^{(1)}$ est linéaire en $(\boldsymbol{z}^{(d_2)},(\boldsymbol{y}^{(d_2,i)})_{i\in\{1,...d_1-1\}}))$. En notant $N\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)$ le cardinal de l'ensemble des $\boldsymbol{z}^{(d_2)},\boldsymbol{y}^{(d_2,1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1-1)}$ tels que $|\boldsymbol{z}^{(d_2)}|\leqslant P_1$, $|\boldsymbol{y}^{(d_2,j)}|\leqslant dP_1P_2$ et

$$\forall i\in I,\quad \left\|\alpha\gamma_{d,i}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right\|<H_i^{-1},$$

on a alors

$$A\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\boldsymbol{r}\right)\ll N\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right),$$

et donc (3.35) donne

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{z}^{(d_2)},\boldsymbol{y}^{(d_2,1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1-1)}}\left|\sum_{\boldsymbol{x}^{(d_1)},\boldsymbol{y}^{(1,d_1)},...,\boldsymbol{y}^{(d_2,d_1)}}e\left(\Gamma\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right)\right|\\ &\ll N\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)\sum_{\boldsymbol{r}}\prod_{i\in I}\min\left(H_i,\max\left(\frac{H_i}{r_i},\frac{H_i}{H_i-r_i-1}\right)\right)\\ &\ll N\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)(P_1\log P_1)^{r+1}(dP_1P_2\log(dP_1P_2))^{d_2(m-r)}.\end{aligned}$$

En résumé, si, pour tous $H_1^{(i)},H_2^{(i,j)},H_3^{(j)}\geqslant 1$ et $B_1,B_2\geqslant 1$,

$$M\left(\alpha,(H_1^{(i)},H_2^{(i,j)},H_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2\}}}B_1^{-1},B_2^{-1}\right)$$

désigne le cardinal de l'ensemble des $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}$ tels que $|\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant H_1^{(i)}$, $|\boldsymbol{y}^{(i,j)}|\leqslant H_2^{(i,j)}$, $|\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant H_2^{(j)}$ pour tous $(i,j)\in\{1,...,d_1-1\}\times\{1,...,d_2\}$ et

$$\forall k\in\{0,...,r\},\quad \left|\left|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right|\right|<B_1^{-1},$$

$$\forall k\in\{r+1,...m\}\times\{1,...,d_2\},\quad \left|\left|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right|\right|<B_2^{-1},$$

en reprenant la formule (3.29), on obtient la majoration (pour $\varepsilon>0$ arbitrairement petit)

(3.36)
$$|S_{d,N,\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha)|^{2^{\tilde{d}}}\ll\left(P_1^{r+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-(d_1-1)+\varepsilon}\left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{2^{\tilde{d}}-(d_1-1)d_2+\varepsilon}\left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{\tilde{d}}-d_2}$$
$$M\left(\alpha,(P_1,dP_1P_2,P_2)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}},P_1^{-1},(dP_1P_2)^{-1}\right).$$

On en déduit (en sommant sur $N\in\{0,...,P_1\}$ et sur les $\mathcal{I},\mathcal{J}\subset\{r+1,...,m\}$) le lemme ci-dessous :

Lemme 3.3.3. *Pour $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa>0$, $P>0$ des réels fixés, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)|\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}}P_1^{m+2+\varepsilon}P_2^{n-r+1+\varepsilon}P^{-\kappa}$,
2. $$M\left(\alpha,(P_1,dP_1P_2,P_2)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}},P_1^{-1},(dP_1P_2)^{-1}\right)$$
$$\gg d^{d_1(r+1)}\left(P_1^{r+1}\right)^{(d_1-1)}\left((dP_1P_2)^{m-r}\right)^{(d_1-1)d_2}\left(P_2^{n-m+1}\right)^{d_2}P^{-2^{\tilde{d}}\kappa}.$$

Remarque 3.3.4. *Si κ est petit, la condition* 1 *donne une majoration de $|S_d(\alpha)|$ plus grande que la majoration triviale,*

$$|S_d(\alpha)|\ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1},$$

(ceci est dû à la sommation sur $N\leqslant P_1$ qui induit un facteur P_1 supplémentaire) c'est pourquoi nous utiliserons uniquement cette majoration pour $P^{\kappa}>P_1^{d_1}P_2^{d_2}$.

3.3.2 Géométrie des nombres

Nous allons à présent établir des résultats de géométrie des nombres qui nous serons utiles pour la suite de cette section. Il s'agit en fait de généralisations de [Da, Lemme 12.6] et de [Sch1, Lemme 3.1].

Lemme 3.3.5. *On considère deux entiers $n_1, n_2 > 0$, des réels $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_1\\ 1\leqslant i\leqslant n_2}}$ et des formes linéaires*

$$\forall i \in \{1, ..., n_1\},\ \forall \boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_{n_2})\ L_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{i,j} u_j,$$

et

$$\forall j \in \{1, ..., n_2\},\ \forall \boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_{n_1})\ L_j^t(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{i,j} u_i.$$

Soient $a_1, ..., a_{n_2}, b_1, ..., b_{n_1} > 1$ des réels fixés. Pour tout $0 \leqslant Z \leqslant 1$, on note

$$U(Z) = \mathrm{Card}\big\{(u_1, ..., u_{n_2}, u_{n_2+1}, ..., u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall j \in \{1, ..., n_2\}$$
$$|u_j| \leqslant a_j Z \text{ et } \forall i \in \{1, ..., n_1\}\ |L_i(u_1, ..., u_{n_2}) - u_{n_2+i}| \leqslant b_i^{-1} Z\big\},$$

$$U^t(Z) = \mathrm{Card}\big\{(u_1, ..., u_{n_1}, u_{n_1+1}, ..., u_{n_1+n_2}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} \mid \forall i \in \{1, ..., n_1\}$$
$$|u_i| \leqslant b_i Z \text{ et } \forall j \in \{1, ..., n_2\}\ |L_j^t(u_1, ..., u_{n_1}) - u_{n_1+i}| \leqslant a_j^{-1} Z\Big\}.$$

Si $0 < Z_1 \leqslant Z_2 \leqslant 1$, on a alors :

$$U(Z_2) \ll_{n_1,n_2} \max\left(\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} \frac{\prod_{j=1}^{n_2} a_j}{\prod_{i=1}^{n_1} b_i} U^t(Z_1)\right).$$

Remarque 3.3.6. *Le lemme 3.1 de [Sch1] (cf lemme 2.2.2) présente uniquement le cas où $a_1 = ... = a_{n_2} = a$ et $b_1 = ... = b_{n_1} = b$. Cette généralisation aux a_i et b_i distincts permet de donner des estimations du nombre de points dans un réseau dont les coordonnées sont bornées par des bornes distinctes.*

Démonstration du lemme 3.3.5. On considère le réseau Λ de $\mathbf{R}^{n_2+n_1}$ défini comme l'ensemble des points

$$(x_1, ..., x_{n_2}, x_{n_2+1}, ..., x_{n_2+n_1}) \in \mathbf{R}^{n_1+n_2}$$

tels qu'il existe

$$(u_1, ..., u_{n_2}, u_{n_2+1}, ..., u_{n_2+n_1}) \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2}$$

tels que

$$\begin{array}{rcl} a_1x_1 & = & u_1, \\ & \vdots & \\ a_{n_2}x_{n_2} & = & u_{n_2}, \\ b_1^{-1}x_{n_2+1} & = & L_1(u_1,...,u_{n_2}) + u_{n_2+1}, \\ & \vdots & \\ b_{n_1}^{-1}x_{n_2+n_1} & = & L_{n_1}(u_1,...,u_{n_2}) + u_{n_2+n_1}. \end{array}$$

Ce réseau est défini par la matrice (i.e une base de ce réseau est donnée par les colonnes de la matrice)

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & (0) & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (0) & & a_{n_2}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_1\lambda_{1,1} & \cdots & b_1\lambda_{1,n_2} & b_1 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n_1}\lambda_{n_1,1} & \cdots & b_{n_1}\lambda_{n_1,n_2} & (0) & & b_{n_1} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $U(Z)$ est alors le nombre de points $(x_1,...,x_{n_1+n_2})$ de Λ tels que $|x_i| \leqslant Z$ pour tout $i \in \{1,...,n_1+n_2\}$. Par ailleurs,

$$B = (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) & -a_1\lambda_{1,1} & \cdots & -a_1\lambda_{n_1,1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (0) & & a_{n_2} & -a_{n_2}\lambda_{1,n_2} & \cdots & -a_{n_2}\lambda_{n_1,n_2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_1^{-1} & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & (0) & & b_{n_1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

définit un réseau Ω ayant les mêmes minima successifs que le réseau $\tilde{\Omega}$ défini par la matrice

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & (0) & 0 & \cdots & \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (0) & & b_{n_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_1\lambda_{1,1} & \cdots & a_1\lambda_{n_1,1} & a_1 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n_2}\lambda_{1,n_2} & \cdots & a_{n_2}\lambda_{n_1,n_2} & (0) & & a_{n_2} \end{pmatrix}.$$

On pose $c = \left(\frac{\prod_{j=1}^{n_2} a_j}{\prod_{i=1}^{n_1} b_i}\right)^{\frac{1}{n_1+n_2}}$ et $\Lambda^{\text{nor}} = c\Lambda$, $\Omega^{\text{nor}} = c^{-1}\tilde{\Omega}$ les réseaux normalisés (i.e de déterminant 1) associés à Λ et Ω. Par la démonstration de [Sch1, Lemme 3.1], on a alors

$$U(Z_2) \ll_{n_1,n_2} \max\left(\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^{n_2} U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}} c^{n_1+n_2} U^t(Z_1)\right).$$

d'où le résultat. $\square$

En particulier, lorsque $n_1 = n_2 = n$, $a_i = b_i$ pour tout i et $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.3.7. *Soit $n > 0$ un entier et $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des réels tels que $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ pour tous i, j, et des formes linéaires*

$$\forall i \in \{1, ..., n_1\},\ \forall \boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)\ L_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} u_j.$$

Soient $a_1, ..., a_n > 1$ des réels fixés. Pour tout $0 \leqslant Z \leqslant 1$, on note

$$\begin{aligned} U(Z) = \operatorname{Card}\{(u_1, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{2n}) \mid \forall j \in \{1, ..., n\}\ |u_j| \leqslant a_j Z \\ \text{et } \forall i \in \{1, ..., n\}\ |L_i(u_1, ..., u_n) - u_{n+i}| \leqslant a_i^{-1} Z\}. \end{aligned}$$

On a alors

$$U(Z_2) \ll_n \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^n U(Z_1).$$

Revenons à présent à la situation de la section précédente, et considérons, pour $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(i,j)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-2\} \\ j\in\{1,...,d_2\}}}$ fixés les $N = (r+1) + d_2(m-r)$ formes linéaires en $(\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}, \boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)})_{j\in\{1,...,d_2\}}$ données par les $\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}$ pour $k \in I$. Remarquons que d'après (3.32) on a pour tout $k \in I$

$$\begin{aligned} \gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\} \\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-1}} G_{d,\boldsymbol{i},k}(\tilde{\boldsymbol{z}}) u_{i_1}^{(1)} ... u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \\ &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-1}} d^{f_{\boldsymbol{i},k}} G_{\boldsymbol{i},k}(\tilde{\boldsymbol{z}}) u_{i_1}^{(1)} ... u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)} \end{aligned}$$

(où $\tilde{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{z}^{(1)}, ..., \boldsymbol{z}^{(d_2)})$ et les $u_i^{(j)}$ sont donnés par (3.28)) et donc pour tous $k, l \in I$ le coefficient $\lambda_{k,l}$ en $u_l^{(d_1-1)}$ s'écrit :

$$\lambda_{k,l} = \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-2}} d^{f_{\boldsymbol{i},l,k}} G_{\boldsymbol{i},l,k}(\tilde{\boldsymbol{z}}) u_{i_1}^{(1)} ... u_{i_{d_1-2}}^{(d_1-2)}$$

et on observe que, puisque les $G_{\boldsymbol{i}}(\tilde{\boldsymbol{z}})$ sont symétriques en $\boldsymbol{i} \in I^{d_1}$.

$$\lambda_{k,l} = \lambda_{l,k}.$$

Pour $P > 0$ fixé, et $\theta \in [0, 1]$ supposés tels que $P^{\theta} \leqslant P_2 \leqslant P_1$, on pose $Z_2 = 1$, $Z_1 = (dP_1)^{-1} P^{\theta}$, $a_k = P_1$ pour tout $k \in I_1 = \{0, ..., r\}$, et $a_k = dP_1 P_2$

pour $k \in I_2 = \{r+1, ..., m\} \times \{1, ..., d_2\}$ de sorte que (en remarquant que $I = I_1 \cup I_2$) :

$$\begin{array}{lrcllcl}
\forall k \in I_1, & a_k Z_2 & = & P_1, & a_k Z_1 & = & P^\theta/d \\
\forall k \in I_2, & a_k Z_2 & = & dP_1P_2, & a_k Z_1 & = & P_2 P^\theta \\
\forall k \in I_1, & a_k^{-1} Z_2 & = & P_1^{-1}, & a_k^{-1} Z_1 & = & d^{-1}P_1^{-2}P^\theta \\
\forall k \in I_2, & a_k^{-1} Z_2 & = & (dP_1P_2)^{-1}, & a_k^{-1} Z_1 & = & (dP_1)^{-2}P_2^{-1}P^\theta
\end{array}$$

En appliquant le lemme 3.3.7, on obtient

$$U(Z_2) \ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta}\right)^{r+1+d_2(m-r)} U(Z_1),$$

avec

$$\begin{aligned}
U(Z_2) = \operatorname{card}\Big\{ & (\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}, (\boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}) \mid |\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}| \leqslant P_1,\ |\boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)}| \leqslant dP_1P_2, \\
& \text{et}\,\forall k \in I_1,\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < P_1^{-1}, \\
& \forall k \in I_2,\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < (dP_1P_2)^{-1} \Big\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
U(Z_1) = \operatorname{card}\Big\{ & (\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}, (\boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)})_{j\in\{1,\dots,d_2\}}) \mid |\boldsymbol{x}^{(d_1-1)}| \leqslant P^\theta/d,\ |\boldsymbol{y}^{(j,d_1-1)}| \leqslant P^\theta P_2, \\
& \text{et}\,\forall k \in I_1,\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-1}P_1^{-2}P^\theta, \\
& \forall k \in I_2,\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-2}P_1^{-2}P_2^{-1}P^\theta \Big\},
\end{aligned}$$

En sommant sur les $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(i,j)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-2\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
& M\left(\alpha, (B_1^{(i)}, B_2^{(j,i)}, B_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}, P_1^{-1}, (dP_1P_2)^{-1}\right) \\
& \ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta}\right)^{r+1+d_2(m-r)} M\left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}, d^{-1}P_1^{-2}P^\theta, d^{-2}P_1^{-2}P_2^{-1}P^\theta\right)
\end{aligned}$$

où

$$\forall\, i \in \{1, ..., d_1-1\},\ \ B_1^{(i)} = P_1$$

$$\forall\, i \in \{1, ..., d_1-1\},\ \ B_2^{(j,i)} = dP_1P_2,$$

$$B_3^{(j)} = P_2,$$

et

$$H_1^{(i)} = \begin{cases} P_1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - 2\} \\ P^\theta/d & \text{si} \quad i = d_1 - 1 \end{cases},$$

$$H_2^{(j,i)} = \begin{cases} dP_1P_2 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - 2\} \\ P^\theta P_2 & \text{si} \quad i = d_1 - 1 \end{cases},$$

$$H_3^{(j)} = P_2.$$

Par la suite, on applique le lemme de la même manière avec $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{i \notin \{d_1, d_1 - l\}}$ fixés (pour l variant de 1 à $d_1 - 1$), et en considérant les $\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}$ comme des formes linéaires en $(\boldsymbol{x}^{(d_1-l)}, \boldsymbol{y}^{(j,d_1-l)})_{j\in\{1,...,d_2\}}$, et en choisissant $Z_2 = d^{-\frac{(l-1)}{2}} P_1^{-\frac{(l-1)}{2}} P^{\frac{(l-1)\theta}{2}}$, $Z_1 = d^{-\frac{(l+1)}{2}} P_1^{-\frac{(l+1)}{2}} P^{\frac{(l+1)\theta}{2}}$, $a_k = d^{\frac{(l-1)}{2}} P_1^{\frac{(l+1)}{2}} P^{-\frac{(l-1)\theta}{2}}$ pour tout $k \in I_1$, et $a_k = d^{\frac{(l+1)}{2}} P_1^{\frac{(l+1)}{2}} P_2 P^{-\frac{(l-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I_2$ de sorte que

$$\begin{array}{llclrcl} \forall k \in I_1, & a_kZ_2 & = & P_1, & a_kZ_1 & = & P^\theta/d \\ \forall k \in I_2, & a_kZ_2 & = & dP_1P_2, & a_kZ_1 & = & P_2P^\theta \\ \forall k \in I_1, & a_k^{-1}Z_2 & = & d^{-(l-1)}P_1^{-l}P^{(l-1)\theta}, & a_k^{-1}Z_1 & = & d^{-(l+1)}P_1^{-(l+1)}P^{l\theta} \\ \forall k \in I_2, & a_k^{-1}Z_2 & = & d^{-l}P_1^{-l}P_2^{-1}P^{(l-1)\theta}, & a_k^{-1}Z_1 & = & d^{-(l+1)}P_1^{-(l+1)}P_2^{-1}P^{l\theta} \end{array}$$

On obtient alors (à l'étape l) la majoration :

$$\begin{aligned} M & \left(\alpha, (B_1^{(i)}, B_2^{(j,i)}, B_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\} \\ j\in\{1,...,d_2\}}}, d^{-(l-1)}P_1^{-l}P^{(l-1)\theta}, d^{-l}P_1^{-l}P_2^{-1}P^{(l-1)\theta} \right) \\ & \ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta}\right)^{r+1+d_2(m-r)} M \left(\alpha, (H_1^{(i)}, H_2^{(j,i)}, H_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\} \\ j\in\{1,...,d_2\}}}, \right. \\ & \qquad \left. d^{-(l+1)}P_1^{-(l+1)}P^{l\theta}, d^{-(l+1)}P_1^{-(l+1)}P_2^{-1}P^{l\theta} \right) \end{aligned}$$

où

$$B_1^{(i)} = \begin{cases} P_1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - l\} \\ P^\theta/d & \text{si} \quad i \in \{d_1 - l + 1, ..., d_1 - 1\} \end{cases},$$

$$B_2^{(j,i)} = \begin{cases} dP_1P_2 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - l\} \\ P^\theta P_2 & \text{si} \quad i \in \{d_1 - l + 1, ..., d_1 - 1\} \end{cases},$$

$$B_3^{(j)} = P_2.$$

et

$$H_1^{(i)} = \begin{cases} P_1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - l - 1\} \\ P^\theta/d & \text{si} \quad i \in \{d_1 - l, ..., d_1 - 1\} \end{cases},$$

$$H_2^{(j,i)} = \begin{cases} dP_1P_2 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., d_1 - l - 1\} \\ P^\theta P_2 & \text{si} \quad i \in \{d_1 - l, ..., d_1 - 1\} \end{cases},$$

$$H_3^{(j)} = P_2.$$

On obtient donc finalement, au rang $l = d_1 - 1$:

$$(3.37)\quad M\left(\alpha, (P_1, dP_1P_2, P_2)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}, P_1^{-1}, (dP_1P_2)^{-1}\right)$$
$$\ll \left(\frac{dP_1}{P^\theta}\right)^{(r+1+d_2(m-r))(d_1-1)} M\left(\alpha, (P^\theta/d, P^\theta P_2, P_2)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}},\right.$$
$$\left. d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\right).$$

Nous allons à présent chercher à établir des majorations analogues avec les $n_2 = (m-r)(d_1-1) + (n-m+1)$-uplets de variables donnés par les $(\boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}}$ pour $j \in \{1, ..., d_2\}$, en considérant toujours les formes linéaires $\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}$. Fixons donc $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}$ vérifiant les $(m-r)$ inégalités données par

(3.38)
$$\left\|\alpha\gamma_{d,(l,d_2)}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}\right)\right\| < d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}$$

pour $l \in \{r+1, ..., m\}$, les formes $\gamma_{d,(l,d_2)}^{(1)}$ ne dépendant pas des $\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}, \boldsymbol{z}^{(d_2)}$. On considère les variables $(\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}, \boldsymbol{z}^{(d_2)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}}$ et les $n_1 = (r+1) + (d_2-1)(m-r)$ formes linéaires $\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}$, $k \neq (l, d_2)$ correspondantes. On applique le lemme 3.3.5 en choisissant $Z_2 = d^{-\frac{d_1}{2}}P_1^{-\frac{d_1}{2}}P_2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$, $Z_1 = d^{-\frac{d_1}{2}}P_1^{-\frac{d_1}{2}}P_2^{-\frac{1}{2}}P^{\frac{(d_1+1)\theta}{2}}$, $a_k = d^{\frac{d_1}{2}}P_1^{\frac{d_1}{2}}P_2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{-(d_1-1)\theta}{2}}$ pour tout $k \in J_1 = \{m+1, ..., n+1\}$, $a_k = d^{\frac{d_1}{2}}P_1^{\frac{d_1}{2}}P_2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{-(d_1-3)\theta}{2}}$ pour $k \in J_2 = \{r+1, ..., m\} \times \{1, ..., d_1-1\}$, $b_k = d^{\frac{d_1}{2}-1}P_1^{\frac{d_1}{2}}P_2^{\frac{1}{2}}P^{-\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I_1 = \{0, ..., r\}$ et $b_k = d^{\frac{d_1}{2}}P_1^{\frac{d_1}{2}}P_2^{\frac{3}{2}}P^{-\frac{(d_1-1)\theta}{2}}$ pour $k \in I_2' = \{r+1, ..., m\} \times \{1, ..., d_2-1\}$ de sorte que

$$\begin{array}{llll}
\forall k \in J_1, & a_kZ_2 = P_2, & & a_kZ_1 = P^\theta \\
\forall k \in J_2, & a_kZ_2 = P^\theta P_2, & & a_kZ_1 = P^{2\theta} \\
\forall k \in I_1, & b_k^{-1}Z_2 = d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, & & b_k^{-1}Z_1 = d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta} \\
\forall k \in I_2', & b_k^{-1}Z_2 = d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}, & & b_k^{-1}Z_1 = d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-2}P^{d_1\theta}
\end{array}$$

et de plus

$$\begin{array}{l}
\forall k \in J_1,\ a_k^{-1}Z_1 = d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta} \\
\forall k \in J_2,\ a_k^{-1}Z_1 = d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta} \\
\forall k \in I_1,\ b_kZ_1 = P^\theta/d \\
\forall k \in I_2',\ b_kZ_1 = P_2P^\theta.
\end{array}$$

On trouve alors

$$U(Z_2) \ll \max\left(\left(\frac{P_2}{P^\theta}\right)^{n_2}U(Z_1), \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}}\frac{\prod_{k\in J}a_k}{\prod_{k\in I_1\cup I_2'}b_k}U^t(Z_1)\right),$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}}\frac{\prod_{k\in J}a_k}{\prod_{k\in I_1\cup I_2'}b_k} &= \frac{\prod_{k\in J}a_kZ_2}{\prod_{k\in I_1\cup I_2'}b_kZ_1}\\ &= d^{r+1}\frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1\theta}}\left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(Z_2) = \operatorname{card}\Big\{&((\boldsymbol{y}^{(d_2,i)},\boldsymbol{z}^{(d_2)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}})\mid |\boldsymbol{z}^{(d_2)}|\leqslant P_2,\ |\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}|\leqslant P^\theta P_2,\\ \text{et}\,\forall k\in I_1,\ &\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta},\\ \forall k\in I_2',\ &\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\Big\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}U(Z_1) = \operatorname{card}\Big\{&((\boldsymbol{y}^{(d_2,i)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}},\boldsymbol{z}^{(d_2)})\mid |\boldsymbol{z}^{(d_2)}|\leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}|\leqslant P^{2\theta},\\ \text{et}\,\forall k\in I_1,\ &\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta},\\ \forall k\in I_2',\ &\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-2}P^{d_1\theta}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U^t(Z_1) = \operatorname{card}\Big\{&(\boldsymbol{x}^{(d_1)},(\boldsymbol{y}^{(j,d_1)})_{j\in\{1,\dots,d_2-1\}})\mid |\boldsymbol{x}^{(d_1)}|\leqslant P^\theta/d,\ |\boldsymbol{y}^{(j,d_1)}|\leqslant P^\theta P_2,\\ \text{et}\,\forall k\in J_1,\ &\left\|\alpha(\gamma_{d,k}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}\right)\right\| < d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta},\\ \forall k\in J_2,\ &\left\|\alpha(\gamma_{d,k}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}\right)\right\| < d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\Big\}.\end{aligned}$$

Rappelons que l'on avait :

$$\Gamma_d^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right) = \sum_{k\in I}\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)u_k^{(d_1)}.$$

Or d'après la remarque 3.3.2, on a $\Gamma_d^{(1)} = \Gamma_d^{(1)'}$. Notons :

$$\Gamma_d^{(1)} = \sum_{\substack{k\in I_1\cup I_2'\\ l\in J_1\cup J_2}}\lambda_{k,l}t_l^{(d_2)}u_k^{(d_1)} + \sum_{j=r+1}^m\alpha_j y_j^{(d_1,d_2)},$$

où les $t_l^{(j)}$ on été définis par (3.24). On a alors,

$$\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)=\sum_{l\in J_1\cup J_2}\lambda_{k,l}t_l^{(d_2)}$$

et

$$(\gamma_{d,l}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)=\sum_{k\in I_1\cup I_2'}\lambda_{k,l}u_k^{(d_1)}$$

Par conséquent les formes linéaires $(\gamma_{d,k}^{(1)})^t$ sont exactement celles que l'on aurait obtenu en différenciant en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ puis en $(\tilde{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{z})$ et en sommant ensuite sur chaque $\boldsymbol{z}^{d_2},\boldsymbol{y}^{d_2,d_1})$. En particulier si l'on considère les formes $(\gamma_{d,k}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)$ comme des formes en $(\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}$ pour un certain $j\in\{1,...,d_2\}$ alors ces formes linéaires vérifient la condition de symétrie du lemme 3.3.7, et on peut alors appliquer ce lemme comme nous l'avions fait pour les formes en $(\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{x}^{(i)})_{j\in\{1,...,d_2-1\}}$, pour finalement obtenir, en posant

$$\begin{aligned}
&M^t\left(\alpha,(H_1^{(i)},H_2^{(j,i)},H_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},B_1^{-1},B_2^{-1}\right)\\
&=\mathrm{Card}\Bigg\{(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\mid\forall(i,j)\in\{1,...,d_1\}\times\{1,...,d_2-1\},\\
&\qquad|\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant H_1^{(i)},\ |\boldsymbol{y}^{(i,j)}|\leqslant H_2^{(i,j)},\ |\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant H_2^{(j)}\\
&\text{et }\forall k\in\{r+1,...,m\},\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)\right\|<B_1^{-1},\\
&\forall k\in\{m+1,...,n+1\}\times\{1,...,d_1\},\ \left\|\alpha(\gamma_{d,k}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\right)\right\|<B_2^{-1}\Bigg\},
\end{aligned}$$

et en choisissant

$$H_2^{(j,i)}=P^\theta P_2$$

$$H_1^{(i)}=P^\theta/d,$$

$$H_3^{(j)}=P_2:$$

$$\sum_{\substack{(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\\ \text{vérifiant (3.38)}}} \frac{Z_2^{n_2}}{Z_1^{n_1}}\frac{\prod_{k\in J}a_k}{\prod_{k\in I_1\cup I_2'}b_k}U^t(Z_1)$$

$$\ll d^{r+1}\frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1\theta}}\left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}}\right)$$

$$M^t\left(\alpha,(H_1^{(i)},H_2^{(j,i)},H_3^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\right)$$

$$\ll d^{r+1}\frac{P_2^{n_2}}{P^{n_1\theta}}\left(\frac{P^{(d_1-1)(m-r)\theta}}{P_2^{(d_2-1)(m-r)}}\right)\left(\frac{P_2}{P^{\theta}}\right)^{(n-m+1)(d_2-1)+(m-r)(d_2-1)d_1}$$

$$M^t\left(\alpha,(P^{\theta}/d,P^{2\theta},P^{\theta})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{\tilde{d}\theta}\right)$$

$$= d^{r+1}\frac{P_2^{(n-m+1)d_2+(m-r)(d_1-1)d_2}}{P^{(n_2(d_2-1)+n_1+(d_2-d_1)(m-r))\theta}}$$

$$M^t\left(\alpha,(P^{\theta}/d,P^{2\theta},P^{\theta})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{\tilde{d}\theta}\right)$$

On a donc démontré ici que

$$M\left(\alpha,(P^{\theta}/d,P^{\theta}P_2,P_2)_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}},\right.$$
$$\left. d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\right)$$
$$\ll \max\{M_1,M_2\},$$

où

$$M_1=\left(\frac{P_2}{P^{\theta}}\right)^{n_2}\mathrm{Card}\left\{(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\mid |\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^{\theta}/d,\right.$$
$$\forall j\in\{1,...,d_2-1\}\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P_2P^{\theta},\ |\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant P_2,\ |\boldsymbol{y}^{(d_2,i)}|\leqslant P^{2\theta},\ |\boldsymbol{z}^{(d_2)}|\leqslant P^{\theta},$$
$$\left.\text{et}\ \forall k\in I\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right\|<B^{(k)}\right\}$$

où

$$B^{(k)}=\begin{cases} d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{d_1\theta} & \text{si}\quad k\in I_1\\ d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-2}P^{d_1\theta} & \text{si}\quad k\in\{r+1,...,m\}\times\{1,...,d_2-1\}\\ d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta} & \text{si}\quad k\in\{r+1,...,m\}\times\{d_2\}\end{cases}$$

et

$$M_2 = d^{r+1}\frac{P_2^{(n-m+1)d_2+(m-r)(d_1-1)d_2}}{P^{(n_2(d_2-1)+n_1+(d_2-d_1)(m-r))\theta}}$$

$$M^t\left(\alpha,(P^\theta/d,P^{2\theta},P^\theta)_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{\tilde{d}\theta}\right)$$

En procédant de la même manière pour tous les n_2-uplets de variables $(\boldsymbol{y}^{(l,i)},\boldsymbol{z}^{(l)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}$ pour $l\in\{1,...,d_2\}$, on obtient à l'étape l :

$$\begin{aligned}M\Big(\alpha,(P^\theta/d,P^\theta P_2,P_2)_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2\}}}&,\\ d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\Big)&\\ \ll\max\{M_1^{(l)},M_2\},&\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}M_1^{(l)}=\left(\frac{P_2}{P^\theta}\right)^{n_2l}\mathrm{Card}\Big\{&(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}\mid|\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^\theta/d,\\ &\forall j\in\{1,...,d_2-l\}\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P_2P^\theta,\ |\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant P_2,\\ &\forall j\in\{d_2-l+1,...,d_2\},|\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P^{2\theta},\ |\boldsymbol{z}^{(d_2)}|\leqslant P^\theta,\\ &\text{et}\,\forall k\in I\ \left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)\right\|<B^{(k,l)}\Big\}\end{aligned}$$

où

$$B^{(k,l)}=\begin{cases}d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-l}P^{(d_1-1+l)\theta} & \text{si}\quad k\in I_1\\ d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-(l+1)}P^{(d_1-1+l)\theta} & \text{si}\quad k\in\{r+1,...,m\}\times\{1,...,d_2-l\}\\ d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-l}P^{(d_1-2+l)\theta} & \text{si}\quad k\in\{r+1,...,m\}\times\{d_2-l+1,...,d_2\}\end{cases}$$

On trouve donc finalement, à l'issu de l'étape d_2 :

(3.39)

$$\begin{aligned}&M\left(\alpha,(P^\theta/d,P^\theta P_2,P_2)_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2\}}},d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta},d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-1}P^{(d_1-1)\theta}\right)\\ &\ll\frac{P_2^{d_2n_2}}{P^{\theta(d_2-1)n_2}}\max\Bigg\{P^{-n_2\theta}M\left(\alpha,(P^\theta/d,P^{2\theta},P^\theta)_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\},\\ j\in\{1,...,d_2\}}},\ H_2,\ H_1\right),\\ &d^{r+1}P^{-(n_1+(m-r)(d_2-d_1))\theta}M^t\left(\alpha,(P^\theta/d,P^{2\theta},P^\theta)_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},H_1,\ H_1\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

où l'on a noté :

$$H_1 = d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta},$$

$$H_2 = d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}.$$

En regroupant le lemme 3.3.3, et les majorations (3.37) et (3.39), on obtient le lemme ci-dessous :

Lemme 3.3.8. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa > 0$, $P > 0$ des réels fixés, pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)| \ll_{n,r,m,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+2+\varepsilon} P_2^{n-r+1+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. $$M\left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}, H_2,\ H_1\right) \gg (P^\theta)^{(d_1-1)(r+1)+2(d_1-1)d_2(m-r)+d_2(n-m+1))} P^{-2^{\tilde{d}}\kappa}$$
3. $$M^t\left(\alpha, (P^\theta/d, P^{2\theta}, P^\theta)_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}, H_1,\ H_1\right) \gg (P^\theta)^{(d_1(r+1)+2d_1(d_2-1)(m-r)+(d_2-1)(n-m+1))} P^{-2^{\tilde{d}}\kappa}.$$

Considérons à présent un élément $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}$ tel que $|\boldsymbol{x}^{(i)}| \leqslant P^\theta/d$, $|\boldsymbol{y}^{(j,i)}| \leqslant P^{2\theta}$, $|\boldsymbol{z}^{(j)}| \leqslant P^\theta$,

$$\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}$$

pour tout $k \in I_1$ et

$$\left\|\alpha\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right)\right\| < d^{-d_1} P_1^{-d_1} P_2^{-d_2} P^{(\tilde{d}+1)\theta}$$

pour tout $k \in I_2$ et supposons qu'il existe $k_0 \in I$ tel que

$$\alpha\gamma_{d,k_0}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1-1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2\}}}\right) \neq 0.$$

On pose alors $q=\gamma_{d,k_0}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)$. Rappelons que d'après (3.32), on a la relation :

$$\begin{aligned}\gamma_{d,k_0}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(j,k)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{k\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-1}} G_{d,\boldsymbol{i},k_0}(\tilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}\\ &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-1}} d^{f_{\boldsymbol{i},k_0}}G_{\boldsymbol{i},k_0}(\tilde{\boldsymbol{z}})u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}\end{aligned}$$

Par conséquent, si $k_0\in I_1$ alors d divise q et on a $q\ll dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ (car $|\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^\theta/d$, $|\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P^{2\theta}$, $|\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant P^\theta$) et si a est l'entier le plus proche de αq, on a donc

$$|\alpha q-a|\leqslant d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta}.$$

Dans le cas où $k_0\in I_2$ on a $q\ll P^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et si a est l'entier le plus proche de αq,

$$|\alpha q-a|\leqslant d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta}.$$

En procédant de même avec les éléments $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}}$ comptés par $M^t\left(\alpha,(P^\theta,P^{2\theta},P^\theta)_{\substack{i\in\{1,...,d_1\}\\ j\in\{1,...,d_2-1\}}},P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta}\right)$, on voit que le lemme 3.3.8 implique

Lemme 3.3.9. *Pour $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, et pour $\kappa>0$, $P>0$ des réels fixés, pour tout $\alpha\in[0,1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)|\ll_{n,r,m,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}}P_1^{m+2+\varepsilon}P_2^{n-r+1+\varepsilon}P^{-\kappa}$,
2. *Il existe q tel que $d|q$, $0<q\leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et a tels que $0\leqslant a<q$ et*
$$|\alpha q-a|\leqslant d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta},$$
3. *Il existe q tel que $0<q\leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et a tels que $0\leqslant a<q$, $\mathrm{pgcd}(a,q)=1$ et*
$$|\alpha q-a|\leqslant d^{-d_1}P_1^{-d_1}P_2^{-d_2}P^{(\tilde{d}+1)\theta},$$
4.
$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\Bigg\{&(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\mid|\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^\theta/d,\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P^{2\theta},\\ &|\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant P^\theta\text{ et }\forall k\in I,\ \gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right)=0\Bigg\}\\ &\gg(P^\theta)^{(d_1-1)(r+1)+2(d_1-1)d_2(m-r)+d_2(n-m+1)}P^{-2^{\tilde{d}}\kappa},\end{aligned}$$

5.

$$\mathrm{Card}\Bigg\{(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}} \mid |\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^{\theta}/d,\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}|\leqslant P^{2\theta},$$
$$|\boldsymbol{z}^{(j)}|\leqslant P^{\theta} \text{ et } \forall k\in J,\ (\gamma_{d,k}^{(1)})^t\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(j,i)},\boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,\dots,d_1\}\\ j\in\{1,\dots,d_2-1\}}}\right)=0\Bigg\}$$
$$\gg (P^{\theta})^{d_1(r+1)+2d_1(d_2-1)(m-r)+(d_2-1)(n-m+1)}P^{-2^{\tilde{d}}\kappa}.$$

Avant d'aller plus loin, nous introduisons les lemmes ci-dessous qui seront utiles à plusieurs reprise par la suite :

Lemme 3.3.10. *On considère $p,q,r\in\mathbf{N}$ et $(L_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ des formes linéaires à $p+q$ variables. Pour des constantes A, B et $(C_i)_{i\in I}$ fixées on note*

$$M\left(A,B,(C_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}\right)=\mathrm{card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbf{Z}^p\times\mathbf{Z}^q \mid |\boldsymbol{x}|\leqslant A,\ |\boldsymbol{y}|\leqslant B,\right.$$
$$\left.\forall i\in\{1,\dots,r\},\ ||L_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})||<C_i\right\}.$$

On a alors pour tout $\xi\geqslant 1$:

$$M\left(A,B,(C_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}\right)\leqslant(2\xi)^qM\left(2A,\frac{B}{\xi},(2C_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}\right).$$

Démonstration. On subdivise le cube $[-B,B]^q$ en $(2\xi)^q$ cubes de taille B/ξ. Prenons un tel cube $\mathcal{C}$ et considérons

$$E(\mathcal{C})=\mathrm{card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbf{Z}^p\times\mathbf{Z}^q \mid |\boldsymbol{x}|\leqslant A,\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{C},\right.$$
$$\left.\forall i\in\{1,\dots,r\},\ ||L_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})||\leqslant C_i\right\}.$$

Si $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')$ sont deux points de $E(\mathcal{C})$, on a alors que

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\leqslant 2A,\ \ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|\leqslant B/\xi$$

et pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$:

$$|L_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')|\leqslant 2C_i.$$

On a donc :

$$E(\mathcal{C})\leqslant M\left(2A,\frac{B}{\xi},(2C_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}\right)$$

pour tout cube $\mathcal{C}$. D'où le résultat. □

De la même manière, on établit :

Lemme 3.3.11. *On considère $p, q, r \in \mathbf{N}$ et $(L_i)_{i\in\{1,...,r\}}$ des formes linéaires à $p+q$ variables. Pour des constantes A, B on note*

$$M\left(A,B\right) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{Z}^q \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant A,\ |\boldsymbol{y}| \leqslant B,\\ \forall i \in \{1,...,r\},\ L_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\}.$$

On a alors pour tout $\xi \geqslant 1$:

$$M\left(A,B\right) \leqslant (2\xi)^q M\left(2A, \frac{B}{\xi}\right).$$

Considérons à présent le cas 4 du lemme 3.3.9. Remarquons avant tout qu'il est facile de voir, en appliquant d_1-1 fois le lemme 3.3.11 (avec $L_i = \gamma_{d,i}^{(1)}$, $\xi = P^\theta$) que le cardinal considéré peut être majoré, à une constante multiplicative près, par

(3.40)
$$(P^\theta)^{(d_1-1)d_2(m-r)} \operatorname{Card}\Bigg\{ (\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}} \mid |\boldsymbol{x}^{(i)}| \leqslant 2P^\theta/d,\\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{z}^{(j)}| \leqslant P^\theta \text{ et } \forall k \in I,\ \gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = 0 \Bigg\}$$

Quitte à agrandir θ, nous pouvons remplacer la borne $2P^\theta$ sur $\boldsymbol{x}^{(i)}$ par P^θ. D'autre part, en reprenant la formule (3.27), on a, pour tout $k \in I$:

$$\gamma_k^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = \sum_{\boldsymbol{i}\in I^{d_1-1}} G_{\boldsymbol{i},k}(\tilde{\boldsymbol{z}}) u_{i_1}^{(1)} ... u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)},$$

on a alors

$$\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = d\gamma_k^{(1)}\left((d\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right),$$

pour tout $k \in I_1$, et

$$\gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = \gamma_k^{(1)}\left((d\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right),$$

pour $k \in I_2$. Par conséquent, on a la majoration :

$$
\begin{aligned}
(3.41)\quad \operatorname{Card}\Bigg\{ &(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}} \mid |\boldsymbol{x}^{(i)}| \leqslant P^\theta/d,\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}| \leqslant P^\theta, \\
&|\boldsymbol{z}^{(j)}| \leqslant P^\theta \text{ et } \forall k \in I,\ \gamma_{d,k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = 0 \Bigg\} \\
\ll \operatorname{Card}\Bigg\{ &(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}} \mid |\boldsymbol{x}^{(i)}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{y}^{(j,i)}| \leqslant P^\theta, \\
&|\boldsymbol{z}^{(j)}| \leqslant P^\theta \text{ et } \forall k \in I,\ \gamma_{k}^{(1)}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}\right) = 0 \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

On considère la variété affine $\mathcal{L}_1$ définie par l'ensemble des éléments $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(j,i)}, \boldsymbol{z}^{(j)})_{\substack{i\in\{1,...,d_1-1\}\\ j\in\{1,...,d_2\}}}$ de l'espace affine de dimension $(d_1-1)(r+1) + (d_1-1)d_2(m-r) + d_2(n-m+1)$ vérifiant les équations $\gamma_k^{(1)} = 0$ pour tout $k \in I$. En posant $\kappa = K\theta$, d'après (3.40), la condition 4 du lemme 3.3.9 implique (par la démonstration de [Br, Théorème 3.1]) :

$$\dim(\mathcal{L}_1) \geqslant (d_1-1)(r+1) + (d_1-1)d_2(m-r) + d_2(n-m+1) - 2^{\tilde{d}}K.$$

On considère par ailleurs la sous-variété affine V_1^* de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}$ définie par les $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}$ tels que

$$\forall i \in \{0, ..., r\},\ \ \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

$$\forall j \in \{r+1, ..., m\},\ \ \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0.$$

Notons par ailleurs $\mathcal{D}$ le sous-espace de l'espace affine de dimension $(d_1 - 1)(r+1) + (d_1-1)d_2(m-r) + d_2(n-m+1)$ défini par les $(r+1)(d_1-2) + (m-r)((d_1-1)d_2-1) + (d_2-1)(n-m+1)$ équations :

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = ... = \boldsymbol{x}^{(d_1-1)}$$

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., d_1-1\} \times \{1, ..., d_2\},\ \ \boldsymbol{y}^{(i,j)} = \boldsymbol{y}^{(1,1)},$$

$$\boldsymbol{z}^{(1)} = \boldsymbol{z}^{(2)} = ... = \boldsymbol{z}^{(d_2)}.$$

Sous la condition 4, on a alors

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}) \geqslant \dim(\mathcal{L}_1) - ((r+1)(d_1-2) + (m-r)((d_1-1)d_2-1) \\
+ (d_2-1)(n-m+1)) \geqslant n+2-2^{\tilde{d}}K.
\end{aligned}
$$

D'autre part, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}$ est isomorphe à V_1^*. Donc, en résumé, la condition 4 implique

$$\dim(V_1^*) \geqslant n + 2 - 2^{\tilde{d}}K.$$

De la même manière, en notant V_2^* la sous-variété de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}$ définie par

$$\forall i \in \{m+1, ..., n+1\}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0,$$

$$\forall j \in \{r+1, ..., m\}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0,$$

on vérifie que la condition 5. implique

$$\dim(V_2^*) \geqslant n + 2 - 2^{\tilde{d}}K.$$

Par conséquent, on choisira

$$K = (n + 2 - \max\{\dim(V_1^*), \dim(V_2^*)\} - \varepsilon)/2^{\tilde{d}} \tag{3.42}$$

(pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit) de sorte que les assertions 4 et 5 ne soient plus possibles. On posera par ailleurs

$$P = P_1^{d_1} P_2^{d_2}. \tag{3.43}$$

Rappelons que l'on considère des réels θ tels que $P^\theta \leqslant P_2 \leqslant P_1$, et donc, si $P_1 = P_2^b$, alors $\theta \leqslant \frac{1}{bd_1 + d_2}$. D'autre part, pour un tel θ, pour a, q tels que $0 < q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$, $d|q$ et $0 \leqslant a < q$, on définit les arcs majeurs

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(1)}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0,1] \mid |\alpha q - a| \leqslant d^{-(d_1 - 1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\}, \tag{3.44}$$

et

$$\mathfrak{M}^{(1)}(\theta) = \bigcup_{\substack{1 \leqslant q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta} \\ d|q}} \bigcup_{0 \leqslant a < q} \mathfrak{M}_{a,q}^{(1)}(\theta). \tag{3.45}$$

De même pour a, q tels que $0 < q \leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta}$, et $0 \leqslant a < q$, on définit

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(2)}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0,1] \mid |\alpha q - a| \leqslant d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\}, \tag{3.46}$$

et

$$\mathfrak{M}^{(2)}(\theta) = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{(2)}(\theta). \tag{3.47}$$

On notera par ailleurs $\mathfrak{m}(\theta) = [0,1[\setminus \left(\mathfrak{M}^{(1)}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2)}(\theta)\right)$ l'ensemble des arcs mineurs. Avec ces notations, le lemme 3.3.9 devient alors

Lemme 3.3.12. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_d(\alpha)| \ll_{n,m,r,\varepsilon} d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta+\varepsilon}$,
2. *Le réel α appartient à $\mathfrak{M}(\theta) = \mathfrak{M}^{(1)}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2)}(\theta)$.*

Remarque 3.3.13. *Dans le cas particulier où $d = 1$ on peut considérer les arcs majeurs*

$$\mathfrak{M}_{a,q}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0,1] \mid |\alpha q - a| \leqslant P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\}$$

et le lemme 3.3.12 peut être exprimé sous la forme suivante :

Lemme 3.3.14. *Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vraie*

1. $|S_1(\alpha)| \ll P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta+\varepsilon}$,
2. *Il existe a, q tels que $1 \leqslant q \leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta}$, $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$, $0 \leqslant a < q$ et le réel α appartient à $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta)$.*

3.3.3 Les arcs mineurs

On considère à présent $\delta > 0$ arbitrairement petit, $\theta_0 \leqslant \frac{1}{bd_1+d_2}$ tels que

$$K - 2(\tilde{d}+1) > \left(2\delta + \frac{b}{bd_1 + d_2} \right) \theta_0^{-1}, \tag{3.48}$$

$$1 > (bd_1 + d_2)(5(\tilde{d}+1)\theta_0 + \delta). \tag{3.49}$$

Remarque 3.3.15. *Pour que les conditions* (3.48) *et* (3.49) *puissent être vérifiées, il est nécessaire d'avoir*

$$K - 2(\tilde{d}+1) > \frac{b}{bd_1 + d_2}(bd_1 + d_2)5(\tilde{d}+1) = 5b(\tilde{d}+1),$$

Soit encore

$$K > (5b+2)(\tilde{d}+1), \tag{3.50}$$

ce que nous supposerons dorénavant.

Avec ces conditions, on a alors le lemme suivant :

Lemme 3.3.16. *On a la majoration*

$$\int_{\alpha \in \mathfrak{m}(\theta)} |S_d(\alpha)| d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}.$$

Démonstration. On considère une suite $(\theta_i)_i$ telle que

$$\theta_T > \theta_{T-1} > ... > \theta_1 > \theta_0,$$
$$\theta_T \leqslant \frac{1}{bd_1 + d_2}$$
$$\theta_T K > 2\delta + 1 + \frac{b}{bd_1 + d_2},$$
$$\forall i \in \{0, ..., T-1\},\ \ 2(\tilde{d}+1)(\theta_{i+1} - \theta_i) < \frac{\delta}{2}$$

Un tel choix de θ_T est possible, étant donné que

$$\frac{K}{bd_1 + d_2} > 2\delta + 1 + \frac{b}{bd_1 + d_2} \Leftrightarrow K > (2\delta + 1)(bd_1 + d_2) + b,$$

ce qui est assuré par la condition $K > (5b+2)(\tilde{d}+1)$ de la remarque 3.3.15. Quitte à supposer P assez grand, on suppose de plus que T est tel que $T \ll P^{\frac{\delta}{2}}$. On a alors, d'après le lemme 3.3.12,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S_d(\alpha)| d\alpha &\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta_T + \varepsilon} \\ &\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{(1)}(\theta_i)) &\ll \sum_{\substack{q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ d|q}} \sum_{0 \leqslant a < q} \frac{1}{q} d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ &\ll d^{-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{(2)}(\theta_i)) &\ll \sum_{q \leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta_i}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \frac{1}{q} d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_i} \\ &\ll d^{-d_1} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}(\theta_i)) \ll d^{-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_i}.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha \in \mathfrak{M}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_i)} |S_d(\alpha)| d\alpha \\ &\quad \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta_{i+1}} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{-K\theta_i + \varepsilon} \\ &\ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+2} P_2^{n-r+1} P^{(2(\tilde{d}+1)-K)\theta_i} P^{-1+2(\tilde{d}+1)(\theta_{i+1}-\theta_i)+\varepsilon} \\ &\quad \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-2\delta+2(\tilde{d}+1)(\theta_i-\theta_{i+1})+\varepsilon} \\ &\qquad \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}-(d_1-1)} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\frac{3}{2}\delta}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en sommant sur tous les i avec $i \in \{0, ..., T-1\}$ et $T \ll P^{\frac{\delta}{2}}$.

□

Ainsi, l'intégrale de $S(\alpha)$ sur les arcs majeurs donne une contribution négligeable par rapport à $d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1}$. Nous allons à présent nous intéresser à la contribution des arcs majeurs.

3.3.4 Les arcs majeurs

Pour des raisons pratiques, nous allons introduire de nouveaux arcs majeurs. Pour tout $\theta \in [0,1]$, $a, q \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \left\{ \alpha \in [0,1] \mid |\alpha q - a| \leqslant q d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \right\}, \tag{3.51}$$

$$\mathfrak{M}'(\theta) = \bigcup_{q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta). \tag{3.52}$$

Remarquons que ce nouvel ensemble $\mathfrak{M}'(\theta)$ contient $\mathfrak{M}(\theta)$. En effet, si $\alpha \in \mathfrak{M}^{(1)}_{a,q}(\theta)$ pour un $d|q$ et $q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ on a alors $q \geqslant d$ et

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqslant q^{-1} d^{-(d_1-1)} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta} \leqslant d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta},$$

donc si $\frac{a}{q} = \frac{a'}{q'}$ avec $\mathrm{pgcd}(a', q') = 1$, on a alors $q' \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et

$$\left| \alpha q' - a' \right| \leqslant q' d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta},$$

et donc $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$. D'autre part il est immédiat que $\mathfrak{M}^{(2)}(\theta) \subset \mathfrak{M}'(\theta)$.

Par ailleurs, si $\theta_0 \in [0,1]$ vérifie les conditions (3.48) et (3.49), on a le lemme suivant

Lemme 3.3.17. *Pour $d_1 \geqslant 2$, les ensembles $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta_0)$, avec $(a,q) \neq (a', q')$. On a alors (puisque $\mathrm{pgcd}(a,q) = \mathrm{pgcd}(a', q') = 1$) :

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \leqslant \left| \frac{a}{q} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{a'}{q'} \right| \leqslant 2d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}.$$

On aurait donc

$$1 \leqslant 2qq' d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0} \leqslant 2d^{2-d_1} P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta_0} \leqslant 2P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta_0},$$

ce qui est absurde pour P assez grand, car d'après (3.49),

$$\theta_0 < \frac{1}{5(\tilde{d}+1)(bd_1+d_2)} < \frac{1}{3(\tilde{d}+1)}.$$

□

Puisque $\mathfrak{M}(\theta_0) \subset \mathfrak{M}'(\theta_0)$, le lemme 3.3.16 implique le résultat suivant :

Lemme 3.3.18. *On a l'estimation :*

$$N_d(P_1,P_2) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)} S_d(\alpha) d\alpha \\ + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta} \right).$$

Par la suite, étant donné $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$, on pose $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$, avec $|\beta| \leqslant d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et on note :

$$S_{a,q,d} = \sum_{\boldsymbol{b}_1 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1}} \sum_{\boldsymbol{b}_2 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} \sum_{\boldsymbol{b}_3 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q} F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \right) \tag{3.53}$$

et

$$I(\beta) = \int_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3 \\ |\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}|}} e(\beta F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})) d\boldsymbol{u} d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{w}. \tag{3.54}$$

On établit alors le lemme suivant ;

Lemme 3.3.19. *Soit $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta_0)$. On a alors*

$$S_d(\alpha) = d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} S_{a,q,d} I(d^{d_1} P \beta) \\ + O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1} \right).$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que

$$S_d(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{b}_1 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1}} \sum_{\boldsymbol{b}_2 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} \sum_{\boldsymbol{b}_3 \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q} F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \right) S_3(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \tag{3.55}$$

où

$$S_3(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{b}_1 (q) \\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{b}_2 (q) \\ |\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}| P_2}} \sum_{\substack{\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{b}_2 (q) \\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2}} e(\beta F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})).$$

Soient $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')$ et $(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{y}'',\boldsymbol{z}'')$ tels que

$$(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}_1,q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}_3)\in P_1\mathcal{B}_1\times dP_1P_2\mathcal{B}_2\times P_2\mathcal{B}_3,$$
$$\text{et } |q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}_2|\leqslant d|q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}_1|P_2,$$

$$(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}_1,q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{b}_3)\in P_1\mathcal{B}_1\times dP_1P_2\mathcal{B}_2\times P_2\mathcal{B}_3,$$
$$\text{et } |q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}_2|\leqslant d|q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}_1|P_2,$$

$$|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|\leqslant 2,\ \ |\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''|\leqslant 2,\ \ |\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}''|\leqslant 2,$$

On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}&|F(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}_1,q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}_3)-F(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}_1,q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{b}_3)|\\ &\ll qd^{d_1}P_1^{d_1-1}P_2^{d_2}+qd^{d_1}P_1^{d_1-1}P_2^{d_2-1}+qd^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{d_2-1}\ll qd^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{d_2-1},\end{aligned}$$

Remarquons que lorsque $q>P_2$, l'égalité du lemme est triviale. En effet, on a dans ce cas la majoration immédiate :

$$\begin{aligned}|S_d(\alpha)|&\ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}\\ &\ll d^{m-r+1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1}\end{aligned}$$

car $P_2<q\leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et d'autre part :

$$\begin{aligned}d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}||I(d^{d_1}P\beta)|&\ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}\\ &\ll d^{m-r+1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1}.\end{aligned}$$

On suppose donc dorénavant que $P_2\geqslant q$. En remplaçant alors S_3 par une intégrale on obtient :

$$\begin{aligned}S_3(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=&\int_{|q\tilde{\boldsymbol{u}}|\leqslant P_1}\int_{|q\tilde{\boldsymbol{v}}|\leqslant d|q\tilde{\boldsymbol{u}}|P_2}\int_{|q\tilde{\boldsymbol{w}}|\leqslant P_2}e(\beta F(dq\tilde{\boldsymbol{u}},q\tilde{\boldsymbol{v}},q\tilde{\boldsymbol{w}}))d\tilde{\boldsymbol{u}}d\tilde{\boldsymbol{v}}d\tilde{\boldsymbol{w}}\\ &+O\left(q|\beta|d^{d_1}P_1^{d_1}P_2^{(d_2-1)}\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1}\left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1}\right)\\ &+O\left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1}\left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m}\right).\end{aligned}$$

En rappelant que $|\beta|\leqslant d^{-d_1}P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}$, et en effectuant le changement de variables

$$\boldsymbol{u}=qP_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}},\ \ \boldsymbol{v}=q(dP_1P_2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}},\ \ \boldsymbol{w}=qP_2^{-1}\tilde{\boldsymbol{w}},$$

on trouve (puisque $P = P_1^{d_1} P_2^{d_2}$)

$$\begin{aligned}
S_3(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} \\
&\int_{|\boldsymbol{u}|\leqslant 1} \int_{|\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}|} \int_{|\boldsymbol{w}|\leqslant 1} e(\beta F(dP_1\boldsymbol{u}, dP_1P_2\boldsymbol{v}, P_2\boldsymbol{w})) d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{w} \\
&+ O\left(q|\beta| d^{d_1} P_1^{d_1} P_2^{(d_2-1)} \left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1} \left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1} \right) \\
&+ O\left(\left(\frac{P_1}{q}\right)^{r+1} \left(\frac{dP_1P_2}{q}\right)^{m-r} \left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m} \right) \\
&= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} I(d^{d_1} P\beta) \\
&+ O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P_2^{-1} q^{-(n+2)} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} \right).
\end{aligned}$$

Puis, en remplaçant S_3 par cette expression dans (3.55), on obtient le résultat. □

En regroupant les lemmes 3.3.18 et 3.3.19, on trouve :

$$\begin{aligned}
N_d(P_1, P_2) &= d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} \sum_{1\leqslant q\leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} q^{-(n+2)} \\
&\sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d} \int_{|\beta|\leqslant d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(d^{d_1} P\beta) d\beta \\
&+ O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta_0} P_2^{-1} \operatorname{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta_0)) \right) \\
&+ O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{-1-\delta} \right).
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\operatorname{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta_0)) \ll \sum_{1\leqslant q\leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0} \ll d^{2-d_1} P^{-1+3(\tilde{d}+1)\theta_0},$$

et que

$$\int_{|\beta|\leqslant d^{-d_1} P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(d^{d_1} P\beta) d\beta = d^{-d_1} P^{-1} \int_{|\beta|\leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta_0}} I(\beta) d\beta,$$

et en notant

$$\mathfrak{S}_d(Q) = \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-(n+2)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d} \tag{3.56}$$

et

$$J(\phi) = \int_{|\beta|\leqslant\phi} I(\beta)d\beta, \tag{3.57}$$

on a

$$\begin{aligned} N_d(P_1,P_2) = d^{m-r-d_1}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}\mathfrak{S}_d(dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0})J(P^{(\tilde{d}+1)\theta_0}) \\ + O\left(d^{m-r+3-d_1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{-1+5(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1}\right) \\ + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{-1-\delta}\right). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Or, d'après (3.49) on a supposé $5(\tilde{d}+1)\theta_0+\delta<\frac{1}{bd_1+d_2}$, donc on obtient :

$$d^{m-r+3-d_1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{-1+5(\tilde{d}+1)\theta_0}P_2^{-1} \ll d^{m-r+3-d_1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{-1-\delta}.$$

On définit à présent

$$\mathfrak{S}_d = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-(n+2)}S_{a,q,d}, \tag{3.59}$$

$$J = \int_{\beta\in\mathbf{R}} I(\beta)d\beta. \tag{3.60}$$

Afin de pouvoir remplaçer $J(P^{(\tilde{d}+1)\theta_0})$ par J dans (3.58), nous allons établir le lemme ci-dessous :

Lemme 3.3.20. *L'intégrale J est absolument convergente, et on a, pour tout ϕ assez grand :*

$$|J-J(\phi)| \ll \phi^{-1}.$$

Démonstration. On choisit un élément $\theta\in[0,1]$ vérifiant les mêmes conditions (3.48) et (3.49) que θ_0. Soit β tel que $|\beta|>\phi$, on considère P_1, P_2, P tels que $|\beta| = P^{(\tilde{d}+1)\theta}$ et on prend $d=1$. On a alors que $P^{-1}\beta\in\mathfrak{M}_{0,1}(\theta)$, et d'après le lemme 3.3.19

$$S_1(P^{-1}\beta) = P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}I(\beta) + O\left(P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta}P_2^{-1}\right). \tag{3.61}$$

D'autre part, $P^{-1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}(\theta)$, donc, puisque les $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta)$ sont disjoints, pour tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, on a, par le lemme 3.3.14,

$$S_1(P^{-1}\beta) \ll P_1^{m+2}P_2^{n-r+1}P^{-K\theta+\varepsilon}. \tag{3.62}$$

Par conséquent, en regroupant (3.61) et (3.62), on trouve :

$$
\begin{aligned}
|I(\beta)| &\ll P_1 P^{-K\theta+\varepsilon} + O\left(P_2^{-1}P^{2(\tilde{d}+1)\theta}\right) \\
&= P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+\varepsilon} + O\left(P^{-\frac{1}{bd_1+d_2}+2(\tilde{d}+1)\theta}\right).
\end{aligned}
$$

Or on a d'après (3.49) que

$$
\frac{1}{bd_1+d_2} - 2(\tilde{d}+1)\theta > 3(\tilde{d}+1)\theta + \delta,
$$

donc

$$
P^{-\frac{1}{bd_1+d_2}+2(\tilde{d}+1)\theta} \ll P^{-3(\tilde{d}+1)\theta-\delta} \ll |\beta|^{-3}.
$$

Par ailleurs, d'après (3.48), on a

$$
K\theta - 2(\tilde{d}+1)\theta > 2\delta + \frac{b}{bd_1+d_2},
$$

et donc

$$
P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+\varepsilon} \ll P^{-2(\tilde{d}+1)\theta} \ll |\beta|^{-2}.
$$

On en déduit donc

$$
\int_{|\beta|>\phi} |I(\beta)| d\beta \ll \phi^{-1}.
$$

D'où le résultat du lemme. $\square$

De même, pour pouvoir remplaçer $\mathfrak{S}_d(dP^{(\tilde{d}+1)\theta_0})$ par $\mathfrak{S}_d$ dans (3.58), on établit :

Lemme 3.3.21. *Pour $d_1 \geqslant 2$, la série $\mathfrak{S}_d$ est absolument convergente, et on a, pour tout $Q \geqslant d$ assez grand :*

$$
|\mathfrak{S}_d - \mathfrak{S}_d(Q)| \ll \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d\} Q^{-\delta},
$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. On choisit un élément $\theta \in [0,1]$ vérifiant les conditions (3.48) et (3.49). Soit $q > Q \geqslant d$ quelconque et a tel que $0 \leqslant a < q$ et $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$. On choisit $P_1, P_2 \geqslant 1$ tels que $q = dP^{(\tilde{d}+1)\theta}$ avec $P = P_1^{d_1}P_2^{d_2}$. D'après le lemme 3.3.19, si $\alpha = \frac{a}{q}$, on a

$$
\begin{aligned}
|S_d(\alpha)| = d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} q^{-(n+2)} S_{a,q,d} I(0) \\
+ O\left(d^{m-r+1} P_1^{m+1} P_2^{n-r+1} P^{2(\tilde{d}+1)\theta} P_2^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, si l'on pose $\theta' = \theta - \nu$ avec $\nu > 0$ arbitrairement petit, on a alors que $\alpha = \frac{a}{q} \notin \mathfrak{M}(\theta')$. En effet, supposons qu'il existe a', q' tels que $d|q'$

$q' \leqslant dP^{(\tilde{d}+1)\theta'} < dP^{(\tilde{d}+1)\theta} = q$, $0 \leqslant a' < q'$, et $\alpha \in \mathfrak{M}^{(1)}_{a',q'}(\theta')$. Il n'est pas possible d'avoir $aq' = qa'$, car dans ce cas on aurait $\frac{a'}{q'} = \frac{a}{q}$, avec $q' < q$, ce qui est absurde puisque $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$. On a alors

$$1 \leqslant |aq' - a'q| \leqslant qd^{-(d_1-1)}P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta'} < d^{2-d_1}P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta}$$

ce qui est absurde car $\theta < \frac{1}{2(\tilde{d}+1)}$ d'après (3.49) et $d_1 \geqslant 2$. De la même manière, s'il existe a', q' tels que $q' \leqslant P^{(\tilde{d}+1)\theta'} < dP^{(\tilde{d}+1)\theta} = q$, $0 \leqslant a' < q'$, $\mathrm{pgcd}(a', q') = 1$ et $\alpha \in \mathfrak{M}^{(2)}_{a',q'}(\theta')$, on a

$$1 \leqslant |aq' - a'q| \leqslant qd^{-d_1}P^{-1+(\tilde{d}+1)\theta'} < d^{1-d_1}P^{-1+2(\tilde{d}+1)\theta}.$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.3.12, on a

$$|S_d(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}}P_1^{m+2}P_2^{n-r+1}P^{-K\theta'+\varepsilon}$$

et on obtient donc (étant donné que $I(0) \asymp 1$), pour ν assez petit :

$$\begin{aligned}|S_{a,q,d}| &\ll q^{n+2}d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}P_1P^{-K\theta'+\varepsilon} + \left(dq^{n+2}P^{2(\tilde{d}+1)\theta}P_2^{-1}\right) \\ &\ll d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}q^{n+2}P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+2\varepsilon} + \left(dq^{n+2}P^{2(\tilde{d}+1)\theta-\frac{1}{bd_1+d_2}}\right).\end{aligned}$$

Or, par les conditions (3.48) et (3.49) on a (pour $\delta = \delta'(\tilde{d}+1)$)

$$P^{\frac{b}{bd_1+d_2}-K\theta+2\varepsilon} \ll P^{-2(\tilde{d}+1)\theta-\delta'(\tilde{d}+1)\theta} = q^{-2-\delta'}$$

$$P^{2(\tilde{d}+1)\theta-\frac{1}{bd_1+d_2}} \ll P^{-3(\tilde{d}+1)\theta-\delta} \ll q^{-3}.$$

On a donc

$$q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}| \ll d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}q^{-2-\delta'} + dq^{-3}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}|\mathfrak{S}_d - \mathfrak{S}_d(Q)| &\ll \sum_{q>Q}\sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-(n+2)}|S_{a,q,d}| \\ &\ll \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d\}\sum_{q>Q}\sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-2-\delta'} \\ &\ll \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d\}Q^{-\delta'}.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.22. *Remarquons que*

$$\mathfrak{S}_d(d) \ll d^2,$$

et donc le lemme précédent nous donne une majoration de $\mathfrak{S}_d$ *;*

$$|\mathfrak{S}_d| \ll d^2 + \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d\}d^{-\delta} \ll \max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}}, d^2\}.$$

En utilisant les lemmes 3.3.21 et 3.3.20, et en notant

$$\sigma_d = d^{m-r-d_1}\mathfrak{S}_d J, \tag{3.63}$$

on obtient finalement la proposition 3.3.1.

Remarque 3.3.23. *Une démonstration analogue dans le cas où $P_1 \leqslant P_2$, et $P_2 = P_1^u$, fournit exactement la même estimation de $N_d(P_1, P_2)$ lorsque*

$$K > \max\{d_1 + ud_2, 7(d_1 + d_2 - 1)\}.$$

3.4 Deuxième étape

Dans cette section nous allons établir, pour un $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{r+1}$ fixé , en notant $k = |\boldsymbol{x}|$, une formule asymptotique pour

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \mathrm{Card}\left\{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (dkP_2\mathcal{B}_2 \times P_2\mathcal{B}_3) \cap \mathbf{Z}^{n-r+1} \mid F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\right\},$$

lorsque $\boldsymbol{x}$ appartient à un ensemble ouvert particulier que nous préciserons. À cette fin on pose

$$S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha) = \sum_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbf{Z}^{m-r} \\ |\boldsymbol{y}|\leqslant dkP_2}} \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in\mathbf{Z}^{n-m+1} \\ |\boldsymbol{z}|\leqslant P_2}} e(\alpha F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})), \tag{3.64}$$

et on remarque que

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \int_0^1 S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha) d\alpha.$$

3.4.1 Somme d'exponentielles

En appliquant le même procédé que pour la section 3.3.1, on a, pour $\boldsymbol{x}$ fixé :

$$|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll \left((dkP_2)^{m-r}\right)^{2^{d_2-1}-d_2} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{2^{d_2-1}-d_2}$$
$$\sum_{\substack{\boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{z}^{(1)} \\ |\boldsymbol{y}^{(1)}|\leqslant dkP_2 \\ |\boldsymbol{z}^{(1)}|\leqslant P_2}} \cdots \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^{(d_2-1)},\boldsymbol{z}^{(d_2-1)} \\ |\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}|\leqslant dkP_2 \\ |\boldsymbol{z}^{(d_2-1)}|\leqslant P_2}} \prod_{j=r+1}^{n+1} \min\left\{H_j, \left|\left|\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}}\right)\right|\right|^{-1}\right\}$$

avec

$$H_j = \left\{\begin{array}{rl} dkP_2 & \text{si} \quad j \in \{r+1, \dots, m\} \\ P_2 & \text{si} \quad j \in \{m+1, \dots, n+1\} \end{array}\right.,$$

$$\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}}\right) = \sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_{d_2-1})\in\{r+1,\dots,n+1\}^{d_2-1}} F_{d\boldsymbol{x},\boldsymbol{i},j} u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_{d_2-1}}^{(d_2-1)},$$

où

$$u_i = \begin{cases} y_i & \text{si} \quad i \in \{r+1, ..., m\} \\ z_i & \text{si} \quad i \in \{m+1, ..., n+1\} \end{cases},$$

et les coefficients $F_{d\boldsymbol{x},\boldsymbol{i},j}$ sont symétriques en $(\boldsymbol{i}, j) \in \{r+1, ..., n+1\}^{d_2}$. À partir de là, on montre, comme dans la section 3.3.1 (voir formule (3.36)) que

$$|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)|^{2^{d_2-1}} \ll \left((dkP_2)^{m-r+\varepsilon}\right)^{2^{d_2-1}-d_2+1} \left(P_2^{n-m+1+\varepsilon}\right)^{2^{d_2-1}-d_2+1} M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, dkP_2, P_2, (dkP_2)^{-1}, P_2^{-1}\right),$$

où l'on a noté pour tous réels strictement positifs H_1, H_2, B_1, B_2 :

$$M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, H_1, H_2, B_1^{-1}, B_2^{-1}\right) = \operatorname{card}\Big\{(\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{z}^{(1)}, ..., \boldsymbol{y}^{(d_2-1)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-1)}) \mid |\boldsymbol{y}^{(i)}| \leqslant H_1,$$
$$|\boldsymbol{z}^{(i)}| \leqslant H_2, \text{ et}, \forall j \in \{r+1, ..., m\} \ \left|\left|\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_2-1\}}\right)\right|\right| \leqslant B_1^{-1}$$
$$\forall j \in \{m+1, ..., n+1\} \ \left|\left|\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_2-1\}}\right)\right|\right| \leqslant B_2^{-1}\Big\}.$$

On en déduit :

Lemme 3.4.1. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. $M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, dkP_2, P_2, (dkP_2)^{-1}, P_2^{-1}\right) \gg \left((dkP_2)^{m-r}\right)^{d_2-1} \left(P_2^{n-m+1}\right)^{d_2-1} P^{-2^{d_2-1}\kappa}$.

Or, pour $(\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_2-2\}}$ fixés, le réseau défini par les $(\boldsymbol{y}^{(d_2-1)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-1)})$ et les formes linéaires $\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}$ est symétrique (i.e. si $\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}(\boldsymbol{u}) = \sum_{l\in\{r+1,...,n+1\}} \lambda_{j,l} u_l$, alors $\lambda_{j,l} = \lambda_{l,j}$). On peut donc appliquer le lemme 3.3.7, avec des paramètres a_j, Z_1, Z_2 bien choisis.

On pose

$$\begin{array}{l} Z_2 = 1 \\ Z_1 = P_2^{-1} P^{\theta} \\ \forall j \in \{r+1, ..., m\}, \ \ a_j = dkP_2 \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, \ \ a_j = P_2 \end{array},$$

avec θ tel que $P^{\theta} \leqslant P_2$ de sorte que

$$\begin{array}{llllll} \forall j \in \{r+1, ..., m\}, & a_j Z_2 & = & dkP_2 & a_j^{-1} Z_2 & = & (dkP_2)^{-1} \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, & a_j Z_2 & = & P_2 & a_j^{-1} Z_2 & = & P_2^{-1} \\ \forall j \in \{r+1, ..., m\}, & a_j Z_1 & = & dkP^{\theta} & a_j^{-1} Z_1 & = & (dk)^{-1} P_2^{-2} P^{\theta} \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, & a_j Z_1 & = & P^{\theta} & a_j^{-1} Z_1 & = & P_2^{-2} P^{\theta}. \end{array}$$

Puis, on réitère ce procédé avec $(\boldsymbol{y}^{(d_2-i)}, \boldsymbol{z}^{(d_2-i)})$, pour $i \in \{2, ..., d_2-1\}$, en choisissant :

$$\begin{array}{l} Z_2 = P_2^{-\frac{(i-1)}{2}} P^{\frac{(i-1)\theta}{2}} \\ Z_1 = P_2^{-\frac{(i+1)}{2}} P^{\frac{(i+1)\theta}{2}} \\ \forall j \in \{r+1, ..., m\}, \quad a_j = dkP_2^{\frac{(i+1)}{2}} P^{-\frac{(i-1)\theta}{2}} \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, \quad a_j = P_2^{\frac{(i+1)}{2}} P^{-\frac{(i-1)\theta}{2}} \end{array},$$

de sorte que

$$\begin{array}{llllll} \forall j \in \{r+1, ..., m\}, & a_j Z_2 & = & dkP_2 & a_j^{-1} Z_2 & = (dk)^{-1} P_2^{-i} P^{(i-1)\theta} \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, & a_j Z_2 & = & P_2 & a_j^{-1} Z_2 & = P_2^{-i} P^{(i-1)\theta} \\ \forall j \in \{r+1, ..., m\}, & a_j Z_1 & = & dkP^\theta & a_j^{-1} Z_1 & = (dk)^{-1} P_2^{-(i+1)} P^{i\theta} \\ \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, & a_j Z_1 & = & P^\theta & a_j^{-1} Z_1 & = P_2^{-(i+1)} P^{i\theta}. \end{array}$$

On obtient alors finalement :

$$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, dkP_2, P_2, (dkP_2)^{-1}, P_2^{-1}\right) \\ & \ll \left(\frac{P_2}{P^\theta}\right)^{(d_2-1)(n-r+1)} M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, dkP^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}\right). \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs (en utilisant le lemme 3.3.10) que

$$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, dkP^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}\right) \\ & \quad \ll (dk)^{(d_2-1)(m-r)} M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}\right) \end{aligned}$$

On a donc le lemme suivant :

Lemme 3.4.2. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. $$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{x}}\left(\alpha, P^\theta, P^\theta, (dk)^{-1} P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}, P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta}\right) \\ & \qquad \gg \left(P^\theta\right)^{(n-r+1)(d_2-1)} P^{-2^{d_2-1}\kappa}. \end{aligned}$$

Remarquons à présent que s'il existe $j_0 \in \{r+1, ..., n+1\}$ tel que $\gamma_{d,\boldsymbol{x},j_0}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i \in \{1,...,d_2-1\}}\right) \neq 0$ pour un certain $(\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i \in \{1,...,d_2-1\}}$ tel que $|\boldsymbol{y}^{(i)}| \leqslant P^\theta$, $|\boldsymbol{z}^{(i)}| \leqslant P^\theta$ pour tout $i \in \{1, ..., d_2-1\}$, et

$$\left\|\alpha \gamma_{d,\boldsymbol{x},j_0}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i \in \{1,...,d_2-1\}}\right)\right\| \leqslant P_2^{-d_2} P^{(d_2-1)\theta},$$

alors en posant $q = \gamma_{d,\boldsymbol{x},j_0}\left((\boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}}\right)$, on a $q \ll d^{d_1}k^{d_1}P^{(d_2-1)\theta}$ et il existe a tel que

$$|\alpha q - a| \leqslant P_2^{-d_2}P^{(d_2-1)\theta}.$$

Quitte à changer θ, on peut supposer $q \leqslant d^{d_1}k^{d_1}P^{(d_2-1)\theta}$, $0 \leqslant a < q$, $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$ et $2|\alpha q - a| \leqslant P_2^{-d_2}P^{(d_2-1)\theta}$. Dans ce qui suit, on posera

$$\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta) = \left\{\alpha \in [0,1[\;|\; 2|\alpha q - a| \leqslant P_2^{-d_2}P^{(d_2-1)\theta}\right\}, \tag{3.65}$$

$$\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta) = \bigcup_{q\leqslant d^{d_1}k^{d_1}P^{(d_2-1)\theta}} \; \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta). \tag{3.66}$$

On en déduit donc :

Lemme 3.4.3. *Si $P > 1$, $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon}P_2^{n+1-r+\varepsilon}P^{-\kappa}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)$,*
3. $$\begin{aligned}\mathrm{Card}\Big\{&(\boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}},\ |\boldsymbol{y}^{(i)}| \leqslant P^\theta,\ |\boldsymbol{z}^{(i)}| \leqslant P^\theta,\\ &\text{et } \forall j \in \{r+1,\dots,n+1\},\ \gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)},\boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}}\right) = 0\Big\}\\ &\gg \left(P^\theta\right)^{(n-r+1)(d_2-1)}P^{-2^{d_2-1}\kappa}.\end{aligned}$$

On définit à présent, pour $\boldsymbol{x}$ fixé :

$$\begin{aligned}V^*_{2,\boldsymbol{x}} = \Big\{&(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{C}^{n-r+1} \mid \forall j \in \{r+1,\dots,m\},\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\\ &\text{et } \forall k \in \{m+1,\dots,n+1\},\ \frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\Big\}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Remarquons que, puisque F est homogème de degré d_1 en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, on a pour tous j,k :

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = d^{d_1-1}\frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$
$$\frac{\partial F}{\partial z_k}(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = d^{d_1}\frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

et donc l'application $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mapsto (d\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ réalise un isomorphisme de $V^*_{2,d\boldsymbol{x}}$ sur $V^*_{2,\boldsymbol{x}}$, donc en particulier :

$$\dim V^*_{2,d\boldsymbol{x}} = \dim V^*_{2,\boldsymbol{x}}.$$

On note par ailleurs :

$$\mathcal{A}_2^\lambda = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{r+1} \mid \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* < \dim V_2^* - (r+1) + \lambda \right\}, \tag{3.68}$$

où $\lambda \in \mathbf{N}$ est un paramètre que nous préciserons ultérieurement. Par abus de langage on notera

$$\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_2^\lambda \cap \mathbf{Z}^{r+1}.$$

Supposons à présent que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$ et que l'assertion 3 du lemme 3.4.3 est vérifiée. Posons par ailleurs $K_2 = \kappa/\theta$. Si $\mathcal{L}_{2,d,\boldsymbol{x}}$ est la sous-variété affine de $\mathbf{A}^{(n-r+1)(d_2-1)}$ définie par les $n-r+1$ équations

$$\gamma_{d,\boldsymbol{x},j}\left((\boldsymbol{y}^{(i)}, \boldsymbol{z}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_2-1\}} \right) = 0,$$

on a alors, d'après la démonstration de [Br, Théorème 3.1] :

$$\dim \mathcal{L}_{2,d,\boldsymbol{x}} \geqslant (n-r+1)(d_2-1) - 2^{d_2-1}K_2.$$

On considère d'autre part l'intersection avec la diagonale

$$\mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y}^{(1)} = \dots = \boldsymbol{y}^{(d_2-1)} \\ \boldsymbol{z}^{(1)} = \dots = \boldsymbol{z}^{(d_2-1)} \end{array} \right. .$$

On a, sous la condition 3,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_{2,d,\boldsymbol{x}} \cap \mathcal{D}_2) &\geqslant \dim \mathcal{L}_{2,d,\boldsymbol{x}} - (n-r+1)(d_2-2) \\ &\geqslant n-r+1-2^{d_2-1}K_2. \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que $\mathcal{L}_{2,d,\boldsymbol{x}} \cap \mathcal{D}_2$ est isomorphe à $V_{2,d\boldsymbol{x}}^*$, et donc, puisque $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, et $\dim V_{2,d\boldsymbol{x}}^* = \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^*$, on obtient

$$2^{d_2-1}K_2 \geqslant n-r+1-\dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* > n+2-\dim V_2^* - \lambda.$$

On posera donc dorénavant

$$K_2 = (n+2-\dim V_2^* - \lambda)/2^{d_2-1} \tag{3.69}$$

et le lemme 3.4.3 devient alors :

Lemme 3.4.4. *Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$ et si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r+\varepsilon} P^{-K_2\theta}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)$.*

Pour tout le reste de cette section on fixera $P = P_2$. Avant d'aller plus loin, nous établissons une propriété de l'ensemble $\mathcal{A}_2^\lambda$

Proposition 3.4.5. *L'ensemble $\mathcal{A}_2^\lambda$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1}$, et de plus, on a*

$$\operatorname{Card}\left\{\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1]^{r+1} \cap (\mathcal{A}_2^\lambda)^c \cap \mathbf{Z}^{r+1}\right\} \ll P_1^{r+1-\lambda}.$$

Remarquons que ceci implique que l'ouvert $\mathcal{A}_2^\lambda$ est non vide lorsque $\lambda > 0$.

Démonstration. On commence par montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \mid \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$ est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1}$.

Notons Y le fermé de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-r}$ définit par :

$$Y = \Big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-r} \mid \forall j \in \{m+1, ..., n+1\}, \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$$
$$\text{et } \forall k \in \{m+1, ..., n+1\}, \frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\Big\}.$$

La projection canonique

$$\pi : Y \subset \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-r} \to \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1},$$

est un morphisme projectif, donc fermé. Par conséquent, d'après [G-D, Corollaire 13.1.5],

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \mid \dim Y_{\boldsymbol{x}} \geqslant \lambda - 1\}$$

est un fermé, et puisque $\dim Y_{\boldsymbol{x}} = \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* - 1$, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1} \mid \dim V_{2,\boldsymbol{x}}^* \geqslant \lambda\}$$

est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{r+1}$.

Nous allons à présent montrer que $\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c \leqslant r + 1 - \lambda$. On remarque que

$$Y \cap ((\mathcal{A}_2^\lambda)^c \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-r}) = \bigsqcup_{\boldsymbol{x} \in (\mathcal{A}_2^\lambda)^c} \pi^{-1}(\boldsymbol{x}).$$

On a alors

$$\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c + \dim V_2^* - (r+1) + \lambda - 1 \leqslant \dim Y = \dim V_2^* - 1,$$

ce qui implique

$$\dim(\mathcal{A}_2^\lambda)^c \leqslant r + 1 - \lambda,$$

et donc

$$\operatorname{card}\{\boldsymbol{x} \in [-P_1, P_1]^{r+1} \cap (\mathcal{A}_2^\lambda)^c(\mathbf{Z})\} \ll P_1^{r+1-\lambda}$$

(cf. démonstration de [Br, Théorème 3.1]). □

3.4.2 Méthode du cercle

On fixe à présent un réel $\theta \in [0,1]$. On suppose de plus que

$$K_2 > 2(d_2 - 1). \tag{3.70}$$

On notera

$$\phi(d,k,\theta) = (dk)^{d_1} P_2^{(d_2-1)\theta}, \tag{3.71}$$

$$\Delta_2(\theta, K_2) = \theta(K_2 - 2(d_2-1)) \tag{3.72}$$

Nous allons à présent, comme dans la section précédente, séparer l'intégrale sur $[0,1]$ de $S(\alpha)$ en intégrales sur les arcs majeurs et les arcs mineurs. Commençons par traiter le cas des arcs mineurs.

Lemme 3.4.6. *Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)} |S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha \ll (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}.$$

Démonstration. On considère une subdivision de l'intervalle $[0,1]$

$$0 < \theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{T-1} < \theta_T = 1$$

telle que

$$2(\theta_{i+1} - \theta_i)(d_2 - 1) < \varepsilon \tag{3.73}$$

et $T \ll P_2^\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (et P_2 assez grand). Puisque $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$, le lemme 3.4.4 donne

$$\begin{aligned}\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta_T)} |S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha &\ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_T+\varepsilon} \\ &\ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)\right) &\ll \sum_{q \leqslant \phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta} \\ &\ll (dk)^{d_1} P_2^{-d_2+2(d_2-1)\theta}.\end{aligned}$$

On a alors pour tout $i \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta_i)} |S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha \\ &\qquad \ll (dk)^{m-r+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_i+\varepsilon} \mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta_{i+1})\right) \\ &\qquad\qquad \ll (dk)^{m-r+d_1+\varepsilon} P_2^{n+1-r-K_2\theta_i+\varepsilon-d_2+2(d_2-1)\theta_{i+1}}\end{aligned}$$

Or,

$$2\theta_{i+1}(d_2-1)-K_2\theta_i = 2(\theta_{i+1}-\theta_i)(d_2-1)-\Delta_2(\theta_i,K_2) < \varepsilon - \Delta_2(\theta,K_2)$$

et donc

$$\int_{\alpha\in\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta_{i+1})\setminus\mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}}(\theta_i)} |S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)|d\alpha \ll (dk)^{m-r+d_1+\varepsilon}P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}$$

et on obtient le résultat souhaité en sommant sur les $i\in\{0,...,T-1\}$. $\square$

On définit à présent la nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta) = \left\{\alpha\in[0,1[\mid 2|\alpha q - a| \leqslant qP_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}\right\}, \tag{3.74}$$

$$\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}(\theta) = \bigcup_{q\leqslant(dk)^{d_1}P^{(d_2-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta). \tag{3.75}$$

Lemme 3.4.7. *Si l'on suppose $(dk)^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$, alors les arcs majeurs $\mathfrak{M}^{\boldsymbol{x}'}_{a,q}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha\in\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)\cap\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a',q'}(\theta)$ pour $(a,q)\neq(a',q')$, $q,q'\leqslant\phi(d,k,\theta)$, $0\leqslant a<q$, $0\leqslant a'<q'$ et $\mathrm{pgcd}(a,q)=\mathrm{pgcd}(a',q')=1$. On a alors

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \left|\frac{a}{q}-\frac{a'}{q'}\right| \leqslant P_2^{-d_2+\theta(d_2-1)}$$

et donc

$$1\leqslant qq'P_2^{-d_2+\theta(d_2-1)} \leqslant (dk)^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)},$$

d'où le résultat. $\square$

Remarquons que puisque $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)\subset\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)$, d'après le lemme **??**, on a le résultat suivant :

Lemme 3.4.8. *Soit $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$, on a alors que :*

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \sum_{q\leqslant\phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\alpha\in\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)} S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)d\alpha + O\left((dk)^{d_1+m-r+\varepsilon}P_2^{n+1-r-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}\right).$$

On considère à présent $\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{r+1}$ quelconque, et on suppose $\alpha\in\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta)$. On pose $\beta=\alpha-\frac{a}{q}$ et donc $|\beta|\leqslant\frac{1}{2}P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$. On a alors le lemme ci-dessous :

Lemme 3.4.9. *On a l'estimation*

$$S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha) = (dk)^{m-r}P_2^{n-r+1}q^{-(n-r+1)}S_{a,q,d}(\boldsymbol{x})I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}P_2^{d_2}\beta) \\ + O\left((dk)^{2d_1+m-r}P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)}\right),$$

avec

$$S_{a,q,d}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}\times(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q}F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right), \tag{3.76}$$

$$I_{\boldsymbol{x}}(\beta) = \int_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in[-1,1]^{m-r}\times[-1,1]^{n-m+1}} e\left(\beta F(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\right)d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{w}. \tag{3.77}$$

Démonstration. Lorsque $P_2 < q$, l'égalité est trivialement vérifiée car alors le terme d'erreur est dominant. En effet, dans ce cas, on observe que :

$$|S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll (dk)^{m-r}P_2^{n-r+1} \ll (dk)^{m-r}P_2^{n-r}q \\ \ll (dk)^{2d_1+m-r}P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)},$$

et

$$(dk)^{m-r}P_2^{n-r+1}q^{-(n-r+1)}|S_{a,q,d}(\boldsymbol{x})||I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}P_2^{d_2}\beta)| \\ \ll (dk)^{m-r}P_2^{n-r+1} \ll (dk)^{2d_1+m-r}P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)},$$

d'où le résultat. Nous supposerons donc dorénavant que $q < P_2$. On peut écrire

$$S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha) = \sum_{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}\times(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n-m+1}} e\left(\frac{a}{q}F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)S_3(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3), \tag{3.78}$$

où

$$S_3(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3) = \sum_{\substack{\boldsymbol{y}\equiv\boldsymbol{b}_2(q)\\|\boldsymbol{y}|\leqslant dkP_2}}\sum_{\substack{\boldsymbol{z}\equiv\boldsymbol{b}_3(q)\\|\boldsymbol{z}|\leqslant P_2}} e\left(\beta F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\right).$$

Si l'on considère $q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}_2, q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}_2 \in [-dkP_2, dkP_2]$ et $q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}_3, q\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{b}_3 \in [-P_2, P_2]$ avec

$$|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''| \ll 1, \ \ |\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}''| \ll 1,$$

on a

$$\left|F(d\boldsymbol{x},q\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b}_3) - F(d\boldsymbol{x},q\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{b}_2,q\boldsymbol{z}''+\boldsymbol{b}_3)\right| \ll q(dk)^{d_1}P_2^{d_2-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}S_3(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3) = \int_{\substack{q\tilde{\boldsymbol{v}}\in[-dkP_2,dkP_2]^{m-r}\\ q\tilde{\boldsymbol{w}}\in[-P_2,P_2]^{n-m+1}}} & e\left(\beta F(d\boldsymbol{x},q\tilde{\boldsymbol{v}},q\tilde{\boldsymbol{w}})\right)d\tilde{\boldsymbol{v}}d\tilde{\boldsymbol{w}} \\ & + O\left(q|\beta|(dk)^{d_1}P_2^{d_2-1}\left(\frac{dkP_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m+1}\right) \\ & \qquad + O\left(\left(\frac{dkP_2}{q}\right)^{m-r}\left(\frac{P_2}{q}\right)^{n-m}\right).\end{aligned}$$

En rappelant que $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$, $q \leqslant \phi(d,k,\theta) = (dk)^{d_1}P^{(d_2-1)\theta}$ et en considérant le changement de variables $q\tilde{\boldsymbol{v}} = dkP_2\boldsymbol{v}$, $q\tilde{\boldsymbol{w}} = P_2\boldsymbol{w}$ on trouve

$$\begin{aligned}(dk)^{m-r}P_2^{n-r+1}q^{-(n-r+1)}I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}P_2^{d_2}\beta) & \\ + O\left(q^{-(n-r)}(dk)^{m-r+d_1}P_2^{n-r+(d_2-1)\theta}\right).&\end{aligned}$$

En remplaçant S_3 par cette nouvelle expression dans (3.78), on obtient le résultat. □

On pose dorénavant

(3.79) $$\tilde{\phi}(P_2,\theta) = \frac{1}{2}P_2^{\theta(d_2-1)},$$

(3.80) $$\eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_2-1).$$

Lemme 3.4.10. *Pour $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = (dk)^{m-r}P_2^{n-r+1-d_2}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta))J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(P_2,\theta)) \\ +O\left((dk)^{d_1+m-r+\varepsilon}P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}\right)+O\left((dk)^{4d_1+m-r}P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)}\right),\end{aligned}$$

où

(3.81) $$\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(Q) = \sum_{q\leqslant Q} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\boldsymbol{x}),$$

(3.82) $$J_{d,\boldsymbol{x}}(\phi) = \int_{|\beta|\leqslant\phi} I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}\beta)d\beta.$$

Démonstration. On notera

$$E_1 = (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon},$$

$$E_2 = (dk)^{2d_1+m-r} P_2^{n-r+2\theta(d_2-1)} \operatorname{Vol}\left(\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)\right).$$

D'après les lemmes 3.4.9 et 3.4.8, on a :

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = (dk)^{m-r} P_2^{n-r+1} \sum_{q\leqslant \phi(d,k,\theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\boldsymbol{x})$$
$$\int_{|\beta|\leqslant P_2^{-d_2}\tilde{\phi}(P_2,\theta)} I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}P_2^{d_2}\beta)d\beta + O(E_1) + O(E_2).$$

Par un changement de variable, on a

$$\int_{|\beta|\leqslant P_2^{-d_2}\tilde{\phi}(P_2,\theta)} I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}P_2^{d_2}\beta)d\beta = P_2^{-d_2}\int_{|\beta|\leqslant \tilde{\phi}(P_2,\theta)} I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}\beta)d\beta$$
$$= P_2^{-d_2} J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(P_2,\theta)).$$

On remarque par ailleurs que

$$\operatorname{Vol}\left(\mathfrak{M}'^{\boldsymbol{x}}(\theta)\right) \ll \sum_{q\leqslant \phi(d,k,\theta)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} P_2^{-d_2+(d_2-1)\theta}$$
$$\ll (dk)^{2d_1} P_2^{-d_2+3(d_2-1)\theta},$$

et donc

$$E_2 \ll (dk)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r-d_2+5\theta(d_2-1)} = (dk)^{4d_1+m-r} P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)},$$

ce qui clôt la démonstration du lemme. □

Par la suite, on pose

$$\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(n-r+1)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q}(\boldsymbol{x}), \tag{3.83}$$

$$J_{d,\boldsymbol{x}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\boldsymbol{x}}(d^{d_1}\beta)d\beta. \tag{3.84}$$

Lemme 3.4.11. *Soit $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon>0$ arbitrairement petit. On suppose par ailleurs que $d_2\geqslant 2$. L'intégrale $J_{d,\boldsymbol{x}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(P_2,\theta)) - J_{d,\boldsymbol{x}}| \ll P_2^{\theta((d_2-1)-K_2)} \max\{P_2^{\varepsilon},(dk)^{\varepsilon}\}.$$

On a de plus $|J_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{\varepsilon}$.

Démonstration. On considère β tel que $|\beta| \geqslant \tilde{\phi}(P_2,\theta)$. On choisit alors des paramètres P et θ' tels que

$$|\beta| = \frac{1}{2}P^{\theta'(d_2-1)}, \tag{3.85}$$

$$P^{-K_2\theta'} = P^{-1+2\theta'(d_2-1)}(dk)^{2d_1}. \tag{3.86}$$

Remarquons que ces deux égalités impliquent

$$\theta' = \frac{\log(2|\beta|)}{(d_2-1)\left(\left(2+\frac{K_2}{(d_2-1)}\right)\log(2|\beta|)+2d_1\log(dk)\right)} \tag{3.87}$$

donc en particulier

$$\theta' \gg \min\left\{1, \frac{\log(2|\beta|)}{\log(dk)}\right\}. \tag{3.88}$$

Par ailleurs, l'égalité (3.86) implique

$$P^{-2+4\theta'(d_2-1)}(dk)^{4d_1} < 1,$$

donc, pour $d_2 \geqslant 2$,

$$P^{-d_2+3\theta'(d_2-1)}(dk)^{2d_1} < 1,$$

et ainsi, d'après le lemme 3.4.7, les arcs majeurs $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}_{a,q}(\theta')$ correspondant à P et θ' sont disjoints deux à deux. Le réel $P^{-d_2}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}(\theta')$, et donc par le lemme 3.4.4, on a l'estimation :

$$|S_{d,\boldsymbol{x}}(P^{-d_2}\beta)| \ll (dk)^{m-r}P^{n-r+1-K_2\theta'+\varepsilon}.$$

D'autre part, le lemme 3.4.9 donne :

$$S_{d,\boldsymbol{x}}(P^{-d_2}\beta) = (dk)^{m-r}P^{n-r+1}I(d^{d_1}\beta) + O\left((dk)^{m-r+2d_1}P^{n-r+2\theta'(d_2-1)}\right).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}|I(d^{d_1}\beta)| &\ll P^{-K_2\theta'+\varepsilon} + (dk)^{2d_1}P^{-1+2\theta'(d_2-1)}\\ &\ll P^{-K_2\theta'+\varepsilon}\\ &\ll |\beta|^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}+\frac{\varepsilon}{\theta'(d_2-1)}}.\end{aligned}$$

Remarquons que, puisque $\theta' \gg \min\left\{1, \frac{\log(2|\beta|)}{\log(dk)}\right\}$,

$$|\beta|^{\frac{\varepsilon}{\theta'(d_2-1)}} \ll \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\},$$

pour $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit. On a donc

$$\begin{aligned}|J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\boldsymbol{x}}| &\ll \int_{|\beta|>\phi(\tilde{\theta})} |\beta|^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}} \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\} d\beta \\ &\ll \tilde{\phi}(\theta)^{1-\frac{K_2}{(d_2-1)}} \max\{\tilde{\phi}(\theta)^{\varepsilon'}, (dk)^{\varepsilon'}\} \\ &\ll P_2^{\theta(d_2-1-K_2)} \max\{P_2^{\varepsilon''}, (dk)^{\varepsilon''}\},\end{aligned}$$

avec ε'' arbitrairement petit.

D'autre part, en choisissant $P_2 \ll 1$, cette inégalité donne

$$|J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{\varepsilon''},$$

et puisque $|J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta))| \ll 1$ lorsque $P_2 \ll 1$, on a immédiatement

$$|J_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{\varepsilon''}.$$

□

Lemme 3.4.12. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose par ailleurs que $d_2 \geqslant 2$. La série $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{x}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon} P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)}.$$

On a de plus $|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon}$.

Pour démontrer ce lemme on introduit pour $\boldsymbol{x}$ fixé et $P \geqslant 1$ la nouvelle série génératrice :

$$S'_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha) = \sum_{|\boldsymbol{y}|\leqslant P} \sum_{|\boldsymbol{z}|\leqslant P} e\left(\alpha F(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\right).$$

De la même manière que pour le lemme 3.4.4, on établit :

Lemme 3.4.13. *Si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S'_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| \ll P^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta)$.*

Démonstration du lemme 3.4.12. Soit $q > \phi(d,k,\theta)$ et $\alpha = \frac{a}{q}$ avec $0 \leqslant a < q$ et $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$. On a alors que $S_{a,q,d}(\boldsymbol{x}) = S'_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)$ avec $P = q$. On considère θ' tel que $q = (dk)^{d_1} q^{(d_2-1)\theta'}$. Si $\theta'' = \theta' - \nu$ pour $\nu > 0$ arbitrairement petit, on a alors que $\alpha \notin \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}(\theta'')$. En effet s'il existait $a', q' \in \mathbf{Z}$ tels que $0 \leqslant a' < q'$, $\mathrm{pgcd}(a',q') = 1$, $q' \leqslant (dk)^{d_1} q^{\theta''(d_2-1)} < q$ et $\alpha \in \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{x}}_{a',q'}(\theta'')$, on aurait alors

$$1 \leqslant |aq' - a'q| < q^{1-d_2+\theta'(d_2-1)},$$

ce qui est absurde pour $d_2 \geqslant 2$. On a donc, d'après le lemme précédent :

$$|S_{a,q,d}(\boldsymbol{x})| \ll q^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta'}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}| &\ll \sum_{q>\phi(d,k,\theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{0\leqslant a<q} |S_{a,q,d}(\boldsymbol{x})| \\
&\ll \sum_{q>\phi(d,k,\theta)} q^{-(n-r+1)} \sum_{0\leqslant a<q} q^{n+1-r+\varepsilon-K_2\theta'} \\
&\ll \sum_{q>\phi(d,k,\theta)} q^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}+1+\varepsilon}(dk)^{\frac{d_1K_2}{(d_2-1)}} \\
&\ll (dk)^{\frac{d_1K_2}{(d_2-1)}}\phi(d,k,\theta)^{-\frac{K_2}{(d_2-1)}+2+\varepsilon} \\
&\ll (dk)^{2d_1+\varepsilon}P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)+\varepsilon}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant $P_2 \ll 1$ cette majoration donne :

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon},$$

et en considérant la majoration triviale $|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta))| \ll (dk)^{2d_1}$, on trouve finalement

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}| \ll (dk)^{2d_1+\varepsilon}.$$

□

On déduit des lemmes 3.4.10, 3.4.12 et 3.4.11 le résultat suivant :

Lemme 3.4.14. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0,1]$ et $P_2 \geqslant 1$ tels que $(dk)^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_2 > 2(d_2-1)$. On a alors que*

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}J_{d,\boldsymbol{x}}(dk)^{m-r}P_2^{n-r+1-d_2} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$E_2 = (dk)^{4d_1+m-r}P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)},$$
$$E_3 = (dk)^{2d_1+m-r+\varepsilon}P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Nous avons déjà vu avec le lemme 3.4.10

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = (dk)^{m-r}P_2^{n-r+1-d_2}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta))J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) + O(E_1) + O(E_2),$$

où

$$E_1 = (dk)^{d_1+m-r+\varepsilon}P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon} \ll E_3.$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 3.4.12 et 3.4.11, on a

$$\begin{aligned}&\left|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta))J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}J_{d,\boldsymbol{x}}\right| \\ &\leqslant |\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}|\,|J_{d,\boldsymbol{x}}| + |\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}(\phi(d,k,\theta))|\left|J_{d,\boldsymbol{x}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{d,\boldsymbol{x}}\right| \\ &\ll (dk)^{2d_1+2\varepsilon}P_2^{\theta(2(d_2-1)-K_2)} + (dk)^{2d_1+\varepsilon}P_2^{\theta((d_2-1)-K_2)}\max\{P_2^{\varepsilon},(dk)^{\varepsilon}\}\end{aligned}$$

et en multlipliant cette inégalité par $(dk)^{m-r}P_2^{n-r+1-d_2}$ on obtient un terme d'erreur

$$(dk)^{2d_1+m-r+\varepsilon}P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon} = E_3,$$

d'où le résultat. □

En fixant $\theta > 0$ tel que $\theta < \frac{1}{5(d_2-1)}$ (de sorte que $\eta(\theta) > 0$), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.15. *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_2 > 2(d_2-1)$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que :*

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}J_{d,\boldsymbol{x}}(dk)^{m-r}P_2^{n-r+1-d_2} + O\left((dk)^{m-r+4d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tout $k < d^{-1}P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$.

Remarque 3.4.16. *La condition d'uniformité $k < d^{-1}P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$ découle de la condition $(dk)^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1$ du lemme 3.4.14.*

Dans ce qui va suivre, pour $P_2 = P_1^u$, avec $u \geqslant 1$ on introduit la fonction

$$g_2(u,\delta) = \left(1 - \frac{5d_1}{u} - \delta\right)^{-1} 5(d_2-1)\left(\frac{3d_1}{u} + 2\delta\right), \tag{3.89}$$

ainsi que

$$N_{d,2}(P_1,P_2) = \mathrm{Card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \\ |\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}|P_2,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\Big\}. \tag{3.90}$$

On a alors le résultat ci-dessous :

Proposition 3.4.17. *On suppose $K_2 > 2(d_2-1)$, $d_2 \geqslant 2$, $P_2 = P_1^u$ avec u supposé strictement supérieur à $5d_1$, et de plus que*

$$K_2 - 2(d_2-1) > g_2(u,\delta).$$

Alors :

$$N_{d,2}(P_1,P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} d^{m-r}|\boldsymbol{x}|^{m-r}\right) P_2^{n-r+1-d_2} + O\left(d^{m-r+5d_1}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Nous poserons ici $P = P_1^{d_1}P_2^{d_2}$. Commençons par démontrer que la propriété est vraie lorsque $d^{2d_1} > PP_2^{-\frac{3}{5}-\delta}$. Dans ce cas on observe que d'une part (en utilisant les lemmes 3.4.12 et 3.4.11) :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} d^{m-r}|\boldsymbol{x}|^{m-r}\right) P_2^{n-r+1-d_2} & \\ \ll d^{m-r+2d_1+2\varepsilon}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1-d_2} & \\ \ll d^{m-r+5d_1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1-d_2}d^{-2d_1} & \\ \ll d^{m-r+5d_1}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta} &\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}N_{d,2}(P_1,P_2) &\ll d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1} \\ &\ll d^{m-r+5d_1}P_1^{m+1}P_2^{n-r+1}P^{-\frac{5}{2}}P_2^{\frac{3}{2}+\frac{5\delta}{2}} \\ &\ll d^{m-r+5d_1}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}.\end{aligned}$$

L'égalité du lemme est donc vérifiée.

Supposons à présent que $d^{2d_1} \leqslant PP_2^{-\frac{3}{5}-\delta}$. Si θ est tel que

$$d^{2d_1}P_1^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} < 1, \tag{3.91}$$

alors d'après le lemme 3.4.14 :

$$N_{d,2}(P_1,P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} d^{m-r}|\boldsymbol{x}|^{m-r}\right) P_2^{n-r+1-d_2} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} (d|\boldsymbol{x}|)^{4d_1+m-r}P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)} \\ &\ll d^{4d_1+m-r}P_1^{4d_1+m+1}P_2^{n-r+1-d_2-\eta(\theta)} \\ &= d^{4d_1+m-r}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1+\frac{5d_1}{u}-d_2-\eta(\theta)}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_3 &= \sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})} (d|\boldsymbol{x}|)^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2-\Delta_2(\theta,K_2)+\varepsilon} \\ &\ll d^{2d_1+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2+\frac{3d_1}{u}-\Delta_2(\theta,K_2)+2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Rappelons que $\eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_2 - 1)$. On choisit alors

$$\theta = \frac{1}{5(d_2-1)}\left(1 - \frac{5d_1}{u} - \delta\right),$$

de sorte que d'une part, en utilisant l'inégalité $d^{2d_1} \leqslant PP_2^{-\frac{3}{5}+\delta}$ on a :

$$d^{2d_2}P_1^{2d_1}P_2^{-d_2+3\theta(d_2-1)} = d^{2d_2}P_1^{2d_1}P_2^{-d_2+\frac{3}{5}(1-\frac{5d_1}{u}-\delta)} = d^{2d_2}P^{-1}P_2^{\frac{3}{5}(1-\delta)} \leqslant P^{-\delta},$$

la condition (3.91) est donc satisfaite, et on a de plus

$$\frac{5d_1}{u} - \eta(\theta) = -\delta.$$

On a par ailleurs, puisque $K_2 - 2(d_2-1) > g_2(u,\delta)$,

$$K_2 - 2(d_2-1) > \theta^{-1}\left(\frac{3d_1}{u} + 2\delta\right),$$

et donc

$$\Delta_2(\theta, K_2) - \frac{3d_1}{u} > 2\delta,$$

d'où le résultat. □

3.4.3 Le cas $d_2 = 1$

Lorsque $d_2 = 1$, on peut obtenir des résultats semblables à ceux du corollaire 3.4.15 et de la proposition 3.4.17 en utilisant des résultats de géométrie des réseaux. On introduit la définition suivante issue de [Wi, Definition 2.1] :

Définition 3.4.18. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, et soit c un entier tel que $0 \leqslant c \leqslant n$. Pour $M \in \mathbf{N}$ et $L > 0$, on dit que S* appartient à Lip(n,c,M,L) *s'il existe M applications $\phi : [0,1]^{n-c} \to \mathbf{R}^n$ vérifiant :*

$$||\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})||_2 \leqslant L||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||_2,$$

$||.||_2$ désignant la norme euclidienne, telles que S soit recouvert par les images de ces applications.

On a le résultat suivant (cf. [M-V, Lemme 2]) :

Lemme 3.4.19. *Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble bordé dont le bord ∂S appartient à $\mathrm{Lip}(n,1,M,L)$. L'ensemble S est alors mesurable et si Λ est un réseau de $\mathbf{R}^n$ de premier minimum successif λ_1, on a*

$$\left|\mathrm{card}(S\cap\Lambda) - \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\det(\Lambda)}\right| \leqslant c(n)M\left(\frac{L}{\lambda_1}+1\right)^{n-1},$$

où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de n.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$ fixé (pour un entier λ tel que $\lambda \leqslant n+2-\dim V_2^*$) de norme $|\boldsymbol{x}| = k$. Puisque $d_2 = 1$ le polynôme $F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ est une forme linéaire en $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ que l'on peut réécrire

$$F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{j=r+1}^{m} A_j(d\boldsymbol{x})y_j + \sum_{j=m+1}^{n+1} B_j(d\boldsymbol{x})z_j,$$

avec $A_j(d\boldsymbol{x})$ ou $B_j(d\boldsymbol{x})$ non tous nuls (car $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})$). On note alors $H_{d,\boldsymbol{x}}$ l'hyperplan de $\mathbf{R}^{n-r+1}$ défini par

$$F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0.$$

On note par ailleurs $C_{d,\boldsymbol{x}}$ le corps convexe $\mathcal{B}_{d,\boldsymbol{x}} \cap H_{d,\boldsymbol{x}}$ où

$$\mathcal{B}_{d,\boldsymbol{x}} = \{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mid |\boldsymbol{y}| \leqslant dk,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant 1\},$$

et $\Lambda_{d,\boldsymbol{x}}$ le réseau $\mathbf{Z}^{n-r+1} \cap H_{d,\boldsymbol{x}}$. Nous allons appliquer le lemme 3.4.19 à $S = P_2 C_{d,\boldsymbol{x}}$ et $\Lambda = \Lambda_{d,\boldsymbol{x}}$ vus respectivement comme un sous-ensemble et un réseau de $H_{d,\boldsymbol{x}}$ de dimension $n-r$. Nous allons pour cela montrer que $\partial C_{d,\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Lip}(n-r,1,2^{n-r+1}(dk)^{m-r},(n-r-1)\sqrt{n-r+1})$. Une face du polytope $C_{d,\boldsymbol{x}}$ est obtenue en prenant l'intersection d'une face $\mathcal{F}$ du polytope $\mathcal{B}_{d,\boldsymbol{x}}$ avec $H_{d,\boldsymbol{x}}$. Considérons par exemple l'intersection (supposée non vide) de la face $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{B}_{d,\boldsymbol{x}} \mid z_{n+1} = 1\}$ avec $H_{d,\boldsymbol{x}}$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\begin{cases} \alpha_j = A_j(d\boldsymbol{x}) & \text{pour} \quad j \in \{r+1,...,m\} \\ \beta_j = B_j(d\boldsymbol{x}) & \text{pour} \quad j \in \{m+1,...,n+1\} \end{cases},$$

de sorte que $H_{d,\boldsymbol{x}}$ a pour équation $\alpha_{r+1}y_{r+1} + ... + \alpha_m y_m + \beta_{m+1}z_{m+1} + ... + \beta_{n+1}z_{n+1} = 0$ (les α_k ou les β_k étant non tous nuls). Par ailleurs on remarque que l'on peut subdiviser $C_{d,\boldsymbol{x}}$ en une union de $2^{n-r+1}(dk)^{m-r}$ polytopes $C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}$ plus petits en posant

$$C_{d,\boldsymbol{x}} = \bigcup_{\boldsymbol{a}=(a_{r+1},...,a_m)\in\{-dk,...,dk-1\}^{m-r}} \ \bigcup_{\boldsymbol{e}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)\in\{-1,0\}^{n-m+1}} C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}},$$

$$C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}} = H_{d,\boldsymbol{x}} \cap \left(\left(\prod_{j=r+1}^{m}[a_j,a_j+1]\right) \times \left(\prod_{j=m+1}^{n+1}[\varepsilon_j,\varepsilon_j+1]\right)\right).$$

On peut par conséquent subdiviser chaque face $\mathcal{F} \cap H_{d,\boldsymbol{x}}$ en considérant $\mathcal{F} \cap C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}$ pour tout $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})$. Pour un couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})$ fixé, et pour tout $\boldsymbol{z} \in \mathcal{F} \cap C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}$, on a alors

$$\alpha_{r+1}y_{r+1} + ... + \alpha_m y_m + \beta_{m+1}z_{m+1} + ... + \beta_n z_n + \beta_{n+1} = 0$$

avec $\max\{\max_{r+1\leqslant j\leqslant m}|\alpha_j|, \max_{m+1\leqslant j\leqslant n}|\beta_j|\} \neq 0$ puisque l'intersection $\mathcal{F} \cap H_{d,\boldsymbol{x}}$ est non vide. Supposons, par exemple, que

$$\max\{\max_{r+1\leqslant j\leqslant m}|\alpha_j|, \max_{m+1\leqslant j\leqslant n}|\beta_j|\} = |\beta_n|,$$

on a alors $z_n = -\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \sum_{j=r+1}^{m}\frac{\alpha_j}{\beta_n}y_j - \sum_{j=m+1}^{n-1}\frac{\beta_j}{\beta_n}z_j$, et on peut construire l'application $\phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}} : [0,1]^{n-1} \to C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}} \subset \mathbf{R}^{n-r+1}$ définie par

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}(t_{r+1},...,t_{n-1}) = (&a_{r+1}+t_{r+1},...,a_m+t_m,\varepsilon_{m+1}+t_{m+1},...,\varepsilon_{n-1}+t_{n-1},\\ &\left.-\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \sum_{j=r+1}^{m}\frac{\alpha_j}{\beta_n}(a_j+t_j) - \sum_{j=m+1}^{n-1}\frac{\beta_j}{\beta_n}(\varepsilon_j+t_j), 1\right).\end{aligned}$$

On remarque alors que $\mathcal{F} \cap C_{d,\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}} \cap H_{d,\boldsymbol{x}} \subset \phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}([0,1]^{n-1})$ et que

$$\begin{aligned}||\phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) - \phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}')||_2 &\leqslant \sqrt{n-r+1}||\phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) - \phi_{\mathcal{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}')||_\infty\\ &\leqslant \sqrt{n-r+1}\max\left(1, \sum_{j=r+1}^{m}\frac{|\alpha_j|}{|\beta_n|} + \sum_{j=m+1}^{n-1}\frac{|\beta_j|}{|\beta_n|}\right)||\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}'||_\infty\\ &\leqslant (n-r-1)\sqrt{n-r+1}||\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}'||_2.\end{aligned}$$

On a donc $\partial C_{d,\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Lip}(n-r, 1, 2^{n-r+1}(dk)^{m-r}, (n-r-1)\sqrt{n-r+1})$ et par conséquent

$$\partial P_2 C_{d,\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Lip}(n, 1, 2^{n-r+1}(dk)^{m-r}, (n-r-1)\sqrt{n-r+1}P_2).$$

De plus puisque $\Lambda_{d,\boldsymbol{x}} \subset \mathbf{Z}^{n-r+1}$ le premier minimum successif de ce réseau est supérieur ou égal à 1. Ainsi, puisque

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in P_2\mathcal{B}_{d,\boldsymbol{x}} \cap \mathbf{Z}^{n-r+1} \mid F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} = \mathrm{card}(\Lambda_{d,\boldsymbol{x}} \cap P_2 C_{d,\boldsymbol{x}}) \tag{3.92}$$

le lemme 3.4.19 nous donne un analogue du corollaire 3.4.15

Lemme 3.4.20. *On a :*

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \frac{\mathrm{Vol}(C_{d,\boldsymbol{x}})}{\det(\Lambda_{d,\boldsymbol{x}})}P_2^{n-r} + O((dk)^{m-r}P_2^{n-r-1}), \tag{3.93}$$

uniformément pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| = k$.

On déduit alors de ce lemme un résultat analogue à la proposition 3.4.17 :

Proposition 3.4.21. *On suppose $d_2 = 1$, $P_2 = P_1^u$ et de plus que $u > d_1$. Alors :*

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \frac{\mathrm{Vol}(C_{d,\boldsymbol{x}})}{\det(\Lambda_{d,\boldsymbol{x}})} \right) P_2^{n-r} + O\left(d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r-\delta} \right),$$

pour un certain $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. D'après le lemme précédent :

$$N_{d,2}(P_1, P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})} \frac{\mathrm{Vol}(C_{d,\boldsymbol{x}})}{\det(\Lambda_{d,\boldsymbol{x}})} \right) P_2^{n-r} + O(\mathcal{E}),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in P_1 \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{x}| = k}} (dk)^{m-r} P_2^{n-r-1} \\ &\ll d^{m-r} P_1^{m+1} P_2^{n-r-1} \\ &= d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+\frac{d_1}{u}-1} \\ &\ll d^{m-r} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r-\delta} \end{aligned}$$

car on a supposé $u > d_1$. □

Les résultats des propositions 3.4.17 et 3.4.21 se révèleront cruciaux pour donner plus tard des estimations de $N_{d,2}(P_1, P_2)$ indépendamment de u.

3.5 Troisième étape

Dans cette section, nous allons chercher à établir des résultats analogues à ceux obtenus dans la section précédente pour $\boldsymbol{z}$ fixé.

Nous allons à présent chercher à évaluer, pour $l \in \mathbf{N}^*$ fixé la somme

$$\sum_{k \leqslant P_1} h_d(k, l),$$

où h_d est la fonction définie par (3.12). On fixe donc

$$l = \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor, |\boldsymbol{z}| \right).$$

Il sera alors nécessaire de distinguer les cas $\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor < |\boldsymbol{z}|$ et $\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor \geqslant |\boldsymbol{z}|$.

3.5.1 Premier cas

On suppose ici $\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor < |\boldsymbol{z}| = l$. On choisira donc de fixer $\boldsymbol{z}$ de norme $|\boldsymbol{z}| = l$. Plutôt que de calculer directement $\sum_{k \leqslant P_1} h_d(k,l)$, nous allons, dans un premier temps, chercher à évaluer

(3.94)
$$N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathrm{Card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{m+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1,\ |\boldsymbol{y}| < dl|\boldsymbol{x}|,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\right\}.$$

On introduit la série génératrice

$$S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha) = \sum_{|\boldsymbol{x}| \leqslant P_1} \sum_{|\boldsymbol{y}| \leqslant dl|\boldsymbol{x}|} e\left(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right). \tag{3.95}$$

On a alors comme précédemment $N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = \int_0^1 S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha) d\alpha$.

Sommes d'exponentielles

Comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, on commence par établir une inégalité de type Weyl. À cette fin, on remarque que

$$|\boldsymbol{y}| < d|\boldsymbol{x}|l \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}| > \frac{|\boldsymbol{y}|}{dl} \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}| \geqslant \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{dl} \right\rfloor + 1.$$

On pose alors $N = \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{dl} \right\rfloor$ (ce qui équivaut à dire que $|\boldsymbol{y}| \in [d(N-1)l, dNl[$), et on remarque que :

$$S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha) = \sum_{N=0}^{P_1-1} S_{d,\boldsymbol{z},N}(\alpha),$$

où

$$S_{d,\boldsymbol{z},N}(\alpha) = \sum_{N+1 \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1} \sum_{d(N-1)l \leqslant |\boldsymbol{y}| < dNl} e(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})). \tag{3.96}$$

Comme dans la section 3.1, étant donné que le polynôme $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ est homogène de degré d_1 en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, on obtient sans difficulté la majoration

$$|S_{d,\boldsymbol{z},N}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll \left(P_1^{r+1}\right)^{2^{d_1-1}-d_1} \left((dlP_1)^{m-r}\right)^{2^{d_1-1}-d_1}$$
$$\sum_{\substack{\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{y}^{(1)} \\ |\boldsymbol{x}^{(1)}| \leqslant P_1 \\ |\boldsymbol{y}^{(1)}| \leqslant dlP_1}} \cdots \sum_{\substack{\boldsymbol{x}^{(d_1-1)},\boldsymbol{y}^{(d_1-1)} \\ |\boldsymbol{x}^{(d_2-1)}| \leqslant P_1 \\ |\boldsymbol{y}^{(d_1-1)}| \leqslant dlP_1}} \prod_{j=0}^{m} \min\left\{H_j, \left|\left|\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}}\right)\right|\right|^{-1}\right\}$$

avec

$$H_j = \begin{cases} P_1 & \text{si} \quad j \in \{0,\dots,r\} \\ dlP_1 & \text{si} \quad j \in \{r+1,\dots,m\}, \end{cases}$$

$$\gamma_{d,\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,...,i_{d_1-1})\in\{0,...,m\}^{d_1-1}}F_{d,\boldsymbol{z},\boldsymbol{i},j}u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)},$$

où

$$u_i=\begin{cases} x_i & \text{si} \quad i\in\{0,...,r\} \\ y_i & \text{si} \quad i\in\{r+1,...,m\},\end{cases}$$

et les coefficients $F_{d,\boldsymbol{z},\boldsymbol{i},j}$ sont symétriques en $(i_1,...,i_{d_1-1},j)\in\{0,...,m\}^{d_2}$. Remarquons que l'on peut écrire

$$F_{d,\boldsymbol{z},\boldsymbol{i},j}=d^{f_{\boldsymbol{i},j}}F_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{i},j},$$

avec

$$f_{\boldsymbol{i},j}=\mathrm{card}\{k\in\{1,...,d_1\}\mid i_k\in\{0,...,r\}\},$$

(en posant $i_{d_1}=j$). À partir de là, on montre, comme dans la section 3.3.1 que

$$|S_{d,\boldsymbol{z},N}(\alpha)|^{2^{d_1-1}}\ll\left(P_1^{r+1+\varepsilon}\right)^{2^{d_1-1}-d_1+1}\left((dlP_1)^{m-r+\varepsilon}\right)^{2^{d_1-1}-d_1+1} M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha,P_1,dlP_1,P_1^{-1},(dlP_1)^{-1}\right),$$

où pour tous réels strictement positifs H_1,H_2,B_1,B_2 :

$$\begin{aligned}(3.97)\quad & M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha,H_1,H_2,B_1^{-1},B_2^{-1}\right)\\ &=\mathrm{card}\Big\{(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{y}^{(1)},...,\boldsymbol{x}^{(d_1-1},\boldsymbol{y}^{(d_2-1)})\mid\forall i\in\{1,...,d_1-1\}\ |\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant H_1,\\ &|\boldsymbol{y}^{(i)}|\leqslant H_2,\ \mathrm{et}\,\forall j\in\{0,...,r\}\ \left\|\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_2-1\}}\right)\right\|\leqslant B_1^{-1},\\ &\quad \mathrm{et}\ \ \forall j\in\{r+1,...,m\}\ \left\|\alpha\gamma_{\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}\right)\right\|\leqslant B_2^{-1}\Big\}.\end{aligned}$$

On en déduit, en sommant sur N, le lemme ci-dessous :

Lemme 3.5.1. *Pour tous $P>1$, $\kappa>0$ et pour tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)|\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}}P_1^{m+2+\varepsilon}(dl)^{m-r+\varepsilon}P^{-\kappa}$,
2. $$M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha,P_1,dlP_1,P_1^{-1},(dlP_1)^{-1}\right)\gg d^{(d_1-1)(r+1)}\left(P_1^{r+1}\right)^{d_1-1}\left((dlP_1)^{m-r}\right)^{d_1-1}P^{-2^{d_1-1}\kappa}.$$

On fixe alors $(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_2-2\}}$ et on applique le lemme 3.3.7 avec les variables $\boldsymbol{x}^{(d_1-1)},\boldsymbol{y}^{(d_1-1)}$ et les formes linéaires $\alpha\gamma_{d,\boldsymbol{z},j}$ pour $j\in\{0,...,m\}$, et en choisissant : $Z_2 = 1$, $Z_1 = d^{-1}P_1^{-1}P^{\theta}$, $a_j = P_1$ pour tout $j \in \{0, ..., r\}$, et $a_j = dlP_1$ pour $j \in \{r+1, ..., m\}$ de sorte que

$$\begin{array}{llllllll} \forall j \in \{0,...,r\}, & a_jZ_2 & = & P_1, & a_jZ_1 & = & P^{\theta}/d \\ \forall j \in \{r+1,...,m\}, & a_jZ_2 & = & dlP_1, & a_jZ_1 & = & lP^{\theta} \\ \forall j \in \{0,...,m\}, & a_j^{-1}Z_2 & = & P_1^{-1}, & a_j^{-1}Z_1 & = & d^{-1}P_1^{-2}P^{\theta} \\ \forall j \in \{r+1,...,m\}, & a_j^{-1}Z_2 & = & (dlP_1)^{-1}, & a_j^{-1}Z_1 & = & d^{-2}P_1^{-2}l^{-1}P^{\theta} \end{array}$$

avec $P > 0$ fixé, et $\theta \in [0, 1]$ tels que $P^{\theta} \leqslant P_1$. En appliquant ce procédé aux autres familles de variables $\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(i)}$, on obtient finalement la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}\right) \\ & \ll \left(\frac{dP_1}{P^{\theta}}\right)^{(d_1-1)(m+1)} M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P^{\theta}/d, lP^{\theta}, d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1}l^{-1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.3.10, on a par ailleurs que

$$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P^{\theta}/d, lP^{\theta}, d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1}l^{-1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right) \\ & \ll l^{(d_1-1)(m-r)} M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P^{\theta}/d, P^{\theta}, d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1}l^{-1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right). \end{aligned}$$

On a donc le lemme suivant :

Lemme 3.5.2. *Pour tous $P > 1$, $\kappa > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. $$\begin{aligned} & M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P^{\theta}/d, P^{\theta}, d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}, d^{-d_1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right) \\ & \qquad \gg \left(P^{\theta}\right)^{(m+1)(d_1-1)} P^{-2^{d_1-1}\kappa}. \end{aligned}$$

On introduit à présent les nouvelles familles d'arcs majeurs

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta) = \left\{\alpha \in [0,1[\ \mid 2|\alpha q - a| \leqslant d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right\}, \tag{3.98}$$

$$\mathfrak{M}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta) = \bigcup_{\substack{q \leqslant dl^{d_2}P^{(d_1-1)\theta} \\ d|q}} \bigcup_{0 \leqslant a < q} \mathfrak{M}_{a,q}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta). \tag{3.99}$$

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(2),\boldsymbol{z}}(\theta) = \left\{\alpha \in [0,1[\ \mid 2|\alpha q - a| \leqslant d^{-d_1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right\}, \tag{3.100}$$

$$\mathfrak{M}^{(2),\boldsymbol{z}}(\theta) = \bigcup_{q \leqslant l^{d_2} P^{(d_1-1)\theta}} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}^{(2),\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta). \tag{3.101}$$

$$\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta) = \mathfrak{M}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta) \cup \mathfrak{M}^{(2),\boldsymbol{z}}(\theta) \tag{3.102}$$

On a alors comme dans les démonstrations des lemmes 3.3.9 et 3.4.3 :

Lemme 3.5.3. *Si $P > 1$, et si $\kappa > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)| \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2+\varepsilon} P^{-\kappa}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta)$,*
3.

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\Big\{ &(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}},\ |\boldsymbol{x}^{(i)}| \leqslant P^\theta/d,\ |\boldsymbol{y}^{(i)}| \leqslant P^\theta, \\ &\text{et } \forall j \in \{r+1,\dots,n+1\},\ \gamma_{d,\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,\dots,d_1-1\}}\right) = 0 \Big\} \\ &\gg \left(P^\theta\right)^{(m+1)(d_1-1)} P^{-2^{d_1-1}\kappa}. \end{aligned}$$

Pour un $\boldsymbol{z}$ fixé, on définit à présent :

$$\begin{aligned} V_{1,\boldsymbol{z}}^* = \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{C}^{m+1} \mid \forall i \in \{0,\dots,r\},\ &\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0 \\ \text{et } \forall j \in \{r+1,\dots,m\},\ &\frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

On note par ailleurs :

$$\mathcal{A}_1^\mu = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^{n-m+1} \mid \dim V_{1,\boldsymbol{z}}^* < \dim V_1^* - (n-m+1) + \mu \right\}, \tag{3.104}$$

où $\mu \in \mathbf{N}$ est un paramètre que nous préciserons ultérieurement. Par abus de langage on note

$$\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_1^\mu \cap \mathbf{Z}^{n-m+1}.$$

On a alors une propriété analogue à la proposition 3.4.5 :

Proposition 3.5.4. *L'ensemble $\mathcal{A}_1^\mu$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n-m+1}$, et de plus, on a que*

$$\mathrm{Card}\left\{ \boldsymbol{z} \in [-P_2, P_2]^{n-m+1} \cap (\mathcal{A}_1^\mu)^c \cap \mathbf{Z}^{n-m+1} \right\} \ll P_2^{n-m+1-\mu}.$$

On commence par remarquer que le cardinal de la condition 3 peut être majoré par

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Big\{&(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}},\ |\boldsymbol{x}^{(i)}|\leqslant P^{\theta},\ |\boldsymbol{y}^{(i)}|\leqslant P^{\theta},\\ &\text{et }\ \forall j\in\{r+1,...,n+1\},\ \gamma_{\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}\right)=0\Big\},\end{aligned}$$

où

$$\gamma_{\boldsymbol{z},j}\left((\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{y}^{(i)})_{i\in\{1,...,d_1-1\}}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}=(i_1,...,i_{d_1-1})\in\{0,...,m\}^{d_1-1}}F_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{i},j}u_{i_1}^{(1)}...u_{i_{d_1-1}}^{(d_1-1)}.$$

Puis, comme dans la démonstration du lemme 3.4.4, en choisissant $\kappa=K_1\theta$ avec

$$K_1=(n+2-\dim V_1^*-\mu)/2^{d_1-1} \tag{3.105}$$

on déduit du lemme 3.5.3 :

Lemme 3.5.5. *Si $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$ et si $\varepsilon>0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)|\ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}}l^{m-r+\varepsilon}P_1^{m+2+\varepsilon}P^{-K_1\theta}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta)$.*

Pour tout le reste de cette section, on fixera $P=P_1$.

Méthode du cercle

On fixe un réel $\theta\in[0,1]$. On suppose de plus que

$$K_1>2(d_1-1). \tag{3.106}$$

On notera

$$\phi_1(d,l,\theta)=dl^{d_2}P_1^{(d_1-1)\theta}, \tag{3.107}$$

$$\Delta_1(\theta,K_1)=\theta(K_1-2(d_1-1)) \tag{3.108}$$

On supposera de plus que θ est tel que

$$\Delta_1(\theta,K_1)>1.$$

Comme précédemment nous allons vérifier que les arcs mineurs fournissent bien un terme d'erreur.

Lemme 3.5.6. *Pour tout $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et si $d_1 \geqslant 2$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta)} |S_{\boldsymbol{z}}(\alpha)| d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}.$$

Démonstration. Considérons une suite

$$0 < \theta = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{T-1} < \theta_T = 1$$

telle que

$$2(\theta_{i+1} - \theta_i)(d_1 - 1) < \varepsilon \tag{3.109}$$

et $T \ll P_1^{\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (et P_1 assez grand). Puisque $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, par le lemme 3.5.5 on a

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta_T)} & |S_{d,\boldsymbol{x}}(\alpha)| d\alpha \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_T+\varepsilon} \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta)\right) & \ll \mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta)\right) + \mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{(2),\boldsymbol{z}}(\theta)\right) \\
& \ll \sum_{q \leqslant dl^{d_2} P_1^{(d_1-1)\theta}} \sum_{0 \leqslant a < q} q^{-1} d^{-(d_1-1)} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta} \\
& + \sum_{q \leqslant l^{d_2} P_1^{(d_1-1)\theta}} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-1} d^{-d_1} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta} \\
& \ll d^{(2-d_1)} l^{d_2} P_1^{-d_1+2(d_1-1)\theta}.
\end{aligned}$$

On a alors pour tout $i \in \{0, ..., T-1\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta_{i+1}) \setminus \mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta_i)} & |S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)| d\alpha \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_i+\varepsilon} \mathrm{Vol}\left(\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}(\theta_{i+1})\right) \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+(2-d_1)} l^{m-r+d_2+\varepsilon} P_1^{m+2-K_1\theta_i+\varepsilon-d_1+2(d_1-1)\theta_{i+1}} \\
& \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+(2-d_1)} l^{m-r+d_2+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}
\end{aligned}$$

et on obtient le résultat souhaité en sommant sur les $i \in \{0, ..., T-1\}$. $\square$

On introduit une nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta) = \left\{\alpha \in [0,1[\mid 2|\alpha q - a| \leqslant q d^{-d_1} P_1^{-d_1} P^{(d_1-1)\theta}\right\}, \tag{3.110}$$

$$\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}(\theta) = \bigcup_{q \leqslant \phi_1(d,l,\theta)} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{z}'}_{a,q}(\theta), \tag{3.111}$$

et on vérifie que $\mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{z}}(\theta) \subset \mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}(\theta)$. On a alors un résultat analogue au lemme 3.4.7 :

Lemme 3.5.7. *Si $d_1 \geqslant 2$ et si l'on suppose $l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$, alors les arcs majeurs $\mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}_{a',q'}(\theta)$ pour $(a,q) \neq (a',q')$, $q, q' \leqslant \phi_1(d,l,\theta)$, $0 \leqslant a < q$, $0 \leqslant a' < q'$ et $\mathrm{pgcd}(a,q) = \mathrm{pgcd}(a',q') = 1$. On a alors

$$1 \leqslant q q' d^{-d_1} P_1^{-d_1+\theta(d_1-1)} \leqslant d^{2-d_1} l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} \leqslant l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)},$$

d'où le résultat. □

Comme précédemment, on déduit des lemmes 3.5.7 et 3.5.6 que :

$$\begin{aligned} N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = &\sum_{q \leqslant \phi_1(d,l,\theta)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\alpha \in \mathfrak{M}^{d,\boldsymbol{z}'}_{a,q}(\theta)} S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha) d\alpha \\ &+ O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}\right). \end{aligned} \tag{3.112}$$

On considère $\alpha \in \mathfrak{M}'^{d,\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta)$. On pose $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$ et donc $|\beta| \leqslant d^{-d_1} P_1^{-d_1+(d_1-1)\theta}$. De la même manière que nous avons établi le lemme 3.4.9, on démontre :

Lemme 3.5.8. *On a l'estimation*

$$\begin{aligned} S_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha) = d^{m-r} l^{m-r} P_1^{m+1} q^{-(m+1)} S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}) I_{\boldsymbol{z}}(d^{d_1} P_1^{d_1} \beta) \\ + O\left(d^{m-r+1} l^{2d_2+m-r} P_1^{m+2\theta(d_1-1)}\right), \end{aligned}$$

avec

$$S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}) = \sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1} \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} e\left(\frac{a}{q} F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{z})\right), \tag{3.113}$$

$$I_{\boldsymbol{z}}(\beta) = \int_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in [-1,1]^{r+1} \times [-1,1]^{m-r} \\ |\boldsymbol{v}| < |\boldsymbol{u}|}} e\left(\beta F(\boldsymbol{u}, l\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z})\right) d\boldsymbol{u} d\boldsymbol{v}. \tag{3.114}$$

Par ailleurs, en posant

$$\tilde{\phi}_1(\theta) = \frac{1}{2}P_1^{\theta(d_1-1)}, \tag{3.115}$$

$$\eta_1(\theta) = 1 - 5\theta(d_1-1), \tag{3.116}$$

on démontre un analogue du lemme 3.4.10 :

Lemme 3.5.9. *Pour $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) \\ + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+2-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}\right) \\ + O\left(d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)}\right), \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(Q) = \sum_{q \leqslant Q} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}), \tag{3.117}$$

$$J_{\boldsymbol{z}}(\phi) = \int_{|\beta| \leqslant \phi} I_{\boldsymbol{z}}(\beta) d\beta. \tag{3.118}$$

On pose à présent :

$$\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}), \tag{3.119}$$

$$J_{\boldsymbol{z}} = \int_{\mathbf{R}} I_{\boldsymbol{z}}(\beta) d\beta. \tag{3.120}$$

Lemme 3.5.10. *Soit $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1 \geqslant 2$ et que $\theta < \frac{1}{2(d_1-1)}$. L'intégrale $J_{\boldsymbol{z}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{\boldsymbol{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon} P_1^{-\frac{K_1\theta}{2}+2\theta(d_1-1)}.$$

On a de plus $|J_{\boldsymbol{z}}| \ll l^{d_2+\varepsilon}$.

Démonstration. On considère β tel que $|\beta| \geqslant \tilde{\phi}(\theta)$. On choisit alors des paramètres P et θ' tels que

$$|\beta| = \frac{1}{2}P^{\theta'(d_1-1)}, \tag{3.121}$$

$$P^{1-K_1\theta'} = P^{-1+2\theta'(d_1-1)}l^{2d_2}. \tag{3.122}$$

Remarquons que ces deux égalités impliquent

$$\theta' = \frac{2(d_1-1)^{-1}\log(2|\beta|)}{\left(2+\frac{K_1}{(d_1-1)}\right)\log(2|\beta|)+2d_2\log(l)} \tag{3.123}$$

donc en particulier

$$\theta' \gg \min\left\{1, \frac{\log(|\beta|)}{\log(l)}\right\}. \tag{3.124}$$

Par ailleurs, on a d'après (3.122) et (3.106) :

$$P^{-2+3\theta'(d_1-1)}l^{2d_2} = P^{\theta'(d_1-1-K_1)} < 1,$$

donc, pour $d_1 \geqslant 2$,

$$P^{-d_1+3\theta'(d_1-1)}l^{2d_2} < 1,$$

et ainsi, d'après le lemme 3.5.7, les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta')$ correspondant à P et θ' sont disjoints deux à deux. Le réel $P^{-d_1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}^{(1),\boldsymbol{z}}(\theta')$, et donc par le lemme 3.5.5 appliqué à $d=1$, on a l'estimation :

$$|S_{1,\boldsymbol{z}}(P^{-d_1}\beta)| \ll l^{m-r+\varepsilon}P^{m+2-K_1\theta'+\varepsilon}.$$

Par le lemme 3.5.8 on a :

$$S_{1,\boldsymbol{z}}(P^{-d_1}\beta) = l^{m-r}P^{m+1}I_{\boldsymbol{z}}(\beta) + O\left(l^{m-r+2d_2}P^{m+2\theta'(d_1-1)}\right).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
|I_{\boldsymbol{z}}(\beta)| &\ll l^{\varepsilon}P^{1-K_1\theta'+\varepsilon} + l^{2d_2}P^{-1+2\theta'(d_1-1)} \\
&\ll l^{\varepsilon}P^{1-K_1\theta'+\varepsilon} \\
&\ll l^{\varepsilon}|\beta|^{\frac{1}{\theta'(d_1-1)}-\frac{K_1}{(d_1-1)}+\frac{\varepsilon}{\theta'(d_1-1)}}.
\end{aligned}$$

Étant donné que $\theta' \gg \min\left\{1, \frac{\log(|\beta|)}{\log(l)}\right\}$,

$$|\beta|^{\frac{\varepsilon}{\theta'(d_1-1)}} \ll \max\{|\beta|^{\varepsilon'}, l^{\varepsilon'}\},$$

pour $\varepsilon'>0$ arbitrairement petit. D'autre part, d'après (3.123) :

$$\begin{aligned}|\beta|^{\frac{1}{\theta'(d_1-1)}-\frac{K_1}{(d_1-1)}} &\ll |\beta|^{\left(1-\frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)}|\beta|^{\frac{\log(l^{d_2})}{\log(2|\beta|)}}\\ &\ll l^{d_2}|\beta|^{\left(1-\frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)}.\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}|J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta))-J_{\boldsymbol{z}}| &\ll l^{d_2+\varepsilon}\int_{|\beta|>\tilde{\phi}(\theta)}|\beta|^{\left(1-\frac{K_1}{2(d_1-1)}\right)+\varepsilon}d\beta\\ &\ll l^{d_2+\varepsilon}\tilde{\phi}(\theta)^{2-\frac{K_1}{2(d_1-1)}+\varepsilon}\\ &\ll l^{d_2+\varepsilon}P_1^{2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon}\end{aligned}$$

avec ε arbitrairement petit.

D'autre part, en choisissant $P_1\ll 1$, cette inégalité donne

$$|J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta))-J_{\boldsymbol{z}}|\ll l^{d_2+\varepsilon},$$

et puisque $|J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta))|\ll 1$ lorsque $P_1\ll 1$, on a immédiatement

$$|J_{\boldsymbol{z}}|\ll l^{d_2+\varepsilon}$$

□

On introduit pour $\boldsymbol{z}$ fixé et $P\geqslant 1$ la nouvelle série génératrice :

$$S'_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)=\sum_{|\boldsymbol{x}|\leqslant P}\sum_{|\boldsymbol{y}|\leqslant P}e\left(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right).$$

De la même manière que pour le lemme 3.5.5, on établit :

Lemme 3.5.11. *Si $\varepsilon>0$ est un réel arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S'_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)|\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}}P^{m+1+\varepsilon-K_1\theta}$,
2. *le réel α appartient à* $\bigcup_{q\leqslant dl^{d_2}P^{(d_1-1)\theta}}\bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta)$,

où $\mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}_{a,q}(\theta)=\{\alpha\in[0,1]\mid 2|\alpha q-a|\leqslant P^{-d_1+(d_1-1)\theta}\}$.

De la même manière que pour le lemme 3.4.12, on en déduit :

Lemme 3.5.12. *Soit $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon>0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1\geqslant 2$. La série $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{z}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta))-\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}|\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon}l^{2d_2+\varepsilon}P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)}.$$

On a de plus $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{z}}|\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon}l^{2d_2+\varepsilon}$.

Démonstration. On considère $q > \phi(d,l,\theta)$, $\alpha = \frac{a}{q}$ avec $0 \leqslant a < q$ et $\operatorname{pgcd}(a,q) = 1$. On a alors $S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}) = S'_{d,\boldsymbol{z}}(\alpha)$ avec $P = q$. On considère θ' tel que $q = dl^{d_2}q^{(d_1-1)\theta'}$. Si $\theta'' = \theta' - \nu$ pour $\nu > 0$ arbitrairement petit, alors s'il existait $a', q' \in \mathbf{Z}$ tels que $0 \leqslant a' < q'$, $\operatorname{pgcd}(a',q') = 1$, $q' \leqslant dl^{d_2}q^{\theta''(d_1-1)} < q$ et $\alpha \in \mathfrak{M}^{\boldsymbol{z}}_{a',q'}(\theta'')$, on aurait alors

$$1 \leqslant |aq' - a'q| \leqslant q^{1-d_1+\theta'(d_1-1)},$$

ce qui est absurde pour $d_1 \geqslant 2$. On a donc, par le lemme précédent :

$$|S_{a,q,d}(\boldsymbol{z})| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} q^{m+1+\varepsilon-K_1\theta'}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}| &\ll \sum_{q > \phi_1(d,l,\theta)} q^{-(m+1)} \sum_{0 \leqslant a < q} |S_{a,q,d}(\boldsymbol{z})| \\
&\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} \sum_{q > \phi_1(d,l,\theta)} q^{-(m+1)} \sum_{0 \leqslant a < q} q^{m+1+\varepsilon-K_1\theta'} \\
&\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} \sum_{q > \phi(d,l,\theta)} q^{-\frac{K_1}{(d_1-1)}+1+\varepsilon} l^{\frac{d_2K_1}{(d_1-1)}} d^{\frac{K_1}{(d_1-1)}} \\
&\ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En prenant $P_1 \ll 1$ cette majoration donne :

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon},$$

et en considérant la majoration triviale $|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta))| \ll d^2 l^{2d_2}$, on trouve finalement

$$|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}| \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{2d_2+\varepsilon}.$$

□

On déduit alors des lemmes 3.5.12 et 3.5.10 :

Lemme 3.5.13. *Soit $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0,1]$ et $P_1 \geqslant 1$ tels que $l^{2d_2}P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_1 > 4(d_1-1)$ et $d_1 \geqslant 2$. On a alors que*

$$N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$E_2 = d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P^{m+1-d_1-\eta(\theta)},$$

$$E_3 = d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} l^{3d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. Par le lemme 3.5.9 :

$$N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) + O(E_1) + O(E_2),$$

où

$$E_1 = d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}} l^{d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon} \ll E_3.$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 3.5.12 et 3.5.10, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}}\right| \\
&\quad \leqslant |\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta)) - \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}|\,|J_{\boldsymbol{z}}| + |\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta))| \left|J_{\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) - J_{\boldsymbol{z}}\right| \\
&\quad \ll d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-K_1)} + d^2 l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{\theta(2(d_1-1)-\frac{K_1}{2})+\varepsilon},
\end{aligned}$$

et en multipliant par $d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1}$, on obtient un terme d'erreur

$$d^{m-r-d_1+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+2+\varepsilon} l^{3d_2+2\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon},$$

d'où le résultat. □

En fixant $\theta > 0$ tel que $\theta < \frac{1}{5(d_1-1)}$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.14. *Soit $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_1 > 4(d_1-1)$ et $d_1 \geqslant 2$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ tel que :*

$$\begin{aligned}
N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) &= \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \\
&\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right),
\end{aligned}$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$.

On pose à présent $P_1 = P_2^b$, avec $b \geqslant 1$ et on introduit la fonction

$$g_1(b,\delta) = \left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta\right)^{-1} 5(d_1-1)\left(\frac{4d_2}{b} + 2\delta\right), \tag{3.125}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2) &= \mathrm{Card}\big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \\
&\qquad |\boldsymbol{y}| < d|\boldsymbol{x}|P_2,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2,\ |\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{z}|,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\} \\
&= \mathrm{Card}\big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \\
&\qquad |\boldsymbol{y}| < d|\boldsymbol{x}|P_2,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2,\ \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor < |\boldsymbol{z}|,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

On a alors la proposition suivante qui est l'analogue de 3.4.17 :

Proposition 3.5.15. *On suppose $K_1 > 4(d_1-1)$, $P_1 = P_2^b$, $b > 5d_2$ et de plus que*
$$\frac{K_1}{2} - 2(d_1-1) > g_1(b,\delta).$$
Alors :
$$\tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} |\boldsymbol{z}|^{m-r}\right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1}$$
$$+ O\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2}\right),$$
pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Démonstration. On sait, d'après le lemme 3.5.13 que :
$$\tilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2) = \left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} |\boldsymbol{z}|^{m-r}\right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} + O(\mathcal{E}_2) + O(\mathcal{E}_3),$$
avec
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= d^{m-r+3-d_1} \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|=l}} l^{4d_2+m-r} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)} \\ &\ll d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)} P_2^{4d_2+n-r+1} \\ &= d^{m-r+3-d_1} P_1^{m+1-d_1+\frac{5d_2}{b}-\eta(\theta)} P_2^{n-r+1-d_2}.\end{aligned}$$
et
$$\mathcal{E}_3 = d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|=l}} l^{3d_2+m-r+\varepsilon} P_1^{n-r+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\varepsilon}$$
$$\ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+2\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{2}+\frac{4d_2}{b}+2\varepsilon} P_2^{n-r+1-d_2}.$$
Rappelons que $\eta(\theta) = 1 - 5\theta(d_1-1)$. On choisit alors
$$\theta = \frac{1}{5(d_1-1)}\left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta\right),$$
de sorte que
$$\frac{5d_2}{b} - \eta(\theta) = -\delta.$$
On a par ailleurs, puisque $\frac{K_1}{2} - 2(d_1-1) > g_1(b,\delta)$,
$$\frac{K_1\theta}{2} - 2\theta(d_1-1) > \left(\frac{4d_2}{b} + 2\delta\right),$$
d'où le résultlat. □

3.5.2 Deuxième cas

On suppose à présent $l = \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor \geqslant |\boldsymbol{z}|$. Dans cette partie nous fixerons l'entier l et $\boldsymbol{z}$ de norme $|\boldsymbol{z}| \leqslant l$, et nous allons évaluer

(3.127)
$$N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathrm{Card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}^{m+1} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1,\ dl|\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{y}| < d(l+1)|\boldsymbol{x}|,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0\right\}.$$

Pour cela on introduit la série génératrice

$$S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha) = \sum_{|\boldsymbol{x}|\leqslant P_1} \sum_{dl|\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{y}|<d(l+1)|\boldsymbol{x}|} e\left(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right), \tag{3.128}$$

de sorte que $N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) = \int_0^1 S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha)d\alpha$.

Les résultats que nous obtiendrons dans cette section seront sensiblement identiques à ceux de la section précédente, à quelques modifications près.

Somme d'exponentielles

Dans ce qui va suivre, pour un $\boldsymbol{y}$ donné, on note $N = \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{dl} \right\rfloor$ et $M = \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d(l+1)} \right\rfloor$. On a alors

$$dl|\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{y}| < d(l+1)|\boldsymbol{x}| \Leftrightarrow M < |\boldsymbol{x}| \leqslant N.$$

On note alors, pour $N, M \in \{0, ..., P_1\}$:

$$S_{d,N,M,l,\boldsymbol{z}}(\alpha) = \sum_{M<|\boldsymbol{x}|\leqslant N} \sum_{\substack{dNl\leqslant|\boldsymbol{y}|<d(N+1)l \\ dM(l+1)\leqslant|\boldsymbol{y}|<d(M+1)(l+1)}} e\left(\alpha F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right), \tag{3.129}$$

et on a

$$S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha) = \sum_{N=1}^{P_1} \sum_{M=1}^{P_1} S_{d,N,M,l,\boldsymbol{z}}(\alpha). \tag{3.130}$$

En appliquant la méthode de différenciation de Weyl des sections précédentes on montre que :

$$|S_{d,N,M,l,\boldsymbol{z}}(\alpha)|^{2^{d_1-1}} \ll \left(P_1^{r+1+\varepsilon}\right)^{2^{d_1-1}-d_1+1} \left((dlP_1)^{m-r+\varepsilon}\right)^{2^{d_1-1}-d_1+1} M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}\right),$$

où $M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha, P_1, dlP_1, P_1^{-1}, (dlP_1)^{-1}\right)$ a été défini dans la section précédente (cf. (3.97)).

Puis, en sommant sur M et N, on en déduit le lemme ci-dessous :

Lemme 3.5.16. *Pour tous $P>1$, $\kappa>0$ et tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha)| \ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}P_1^{m+3+\varepsilon}l^{m-r+\varepsilon}P^{-\kappa}$,
2. $M_{d,\boldsymbol{z}}\left(\alpha,P_1,dlP_1,P_1^{-1},(dlP_1)^{-1}\right) \gg d^{(d_1-1)(r+1)}\left(P_1^{r+1}\right)^{d_1-1}\left((dlP_1)^{m-r}\right)^{d_1-1}P^{-2^{d_1-1}\kappa}$.

Par les mêmes arguments que ceux employés dans la section précédente, on en déduit l'équivalent du lemme 3.5.5,

Lemme 3.5.17. *Si $\varepsilon>0$ est un réel arbitrairement petit, et si $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, l'une au moins des assertions suivantes est vérifiée :*

1. $|S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha)| \ll d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}l^{m-r+\varepsilon}P_1^{m+3+\varepsilon}P^{-K_1\theta}$,
2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^l(\theta)$,*

où l'on a noté

$$\mathfrak{M}^l(\theta)=\mathfrak{M}^{(1),l}(\theta)\cup\mathfrak{M}^{(2),l}(\theta) \tag{3.131}$$

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(1),l}(\theta)=\left\{\alpha\in[0,1[\ \mid 2|\alpha q-a|\leqslant d^{-(d_1-1)}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right\}, \tag{3.132}$$

$$\mathfrak{M}^{(1),l}(\theta)=\bigcup_{\substack{q\leqslant dl^{d_2}P^{(d_1-1)\theta}\\ d|q}}\ \bigcup_{0\leqslant a<q}\mathfrak{M}_{a,q}^{(1),l}(\theta). \tag{3.133}$$

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(2),l}(\theta)=\left\{\alpha\in[0,1[\ \mid 2|\alpha q-a|\leqslant d^{-d_1}P_1^{-d_1}P^{(d_1-1)\theta}\right\}, \tag{3.134}$$

$$\mathfrak{M}^{(2),l}(\theta)=\bigcup_{q\leqslant l^{d_2}P^{(d_1-1)\theta}}\ \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\mathfrak{M}_{a,q}^{(2),l}(\theta). \tag{3.135}$$

À partir d'ici, on fixe à nouveau $P=P_1$.

Méthode du cercle

Pour les arcs mineurs, par des calculs analogues à ceux effectués pour établir le lemme 3.5.6, on trouve :

Lemme 3.5.18. *Pour tout $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, on a la majoration :*

$$\int_{\alpha\notin\mathfrak{M}^l(\theta)}|S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha)|d\alpha \ll d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}}l^{d_2+m-r+\varepsilon}P_1^{m+3-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}.$$

Pour les arcs majeurs, on a les équivalents des lemmes 3.5.8 et 3.5.9 :

Lemme 3.5.19. *On a l'estimation*

$$S_{d,l,\boldsymbol{z}}(\alpha) = d^{m-r}l^{m-r}P_1^{m+1}q^{-(m+1)}S_{a,q,d}(\boldsymbol{z})I_{l,\boldsymbol{z}}(d^{d_1}P_1^{d_1}\beta) + O\left(d^{m-r+1}l^{2d_2+m-r}P_1^{m+2\theta(d_1-1)}\right),$$

avec

$$S_{d,a,q}(\boldsymbol{z}) = \sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{r+1}\times(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{m-r}} e\left(\frac{a}{q}F(d\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{z})\right), \tag{3.136}$$

$$I_{l,\boldsymbol{z}}(\beta) = \int_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in[-1,1]^{r+1}\times[-1,1]^{m-r} \\ |\boldsymbol{u}|\leqslant|\boldsymbol{v}|<\left(1+\frac{1}{l}\right)|\boldsymbol{u}|}} e\left(\beta F(\boldsymbol{u},l\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})\right) d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}. \tag{3.137}$$

Lemme 3.5.20. *Pour $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, on a l'estimation suivante :*

$$N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) = d^{m-r-d_1}l^{m-r}P_1^{m+1-d_1}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi_1(d,l,\theta))J_{l,\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}_1(\theta)) + O\left(d^{m-r+\varepsilon+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}}l^{d_2+m-r+\varepsilon}P_1^{m+3-d_1-\Delta_1(\theta,K_1)+\varepsilon}\right) + O\left(d^{m-r+3-d_1}l^{4d_2+m-r}P_1^{m+1-d_1-\eta(\theta)}\right),$$

où

$$\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}(\phi(d,l,\theta)) = \sum_{q\leqslant\phi(d,l,\theta)} q^{-(m+1)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,d}(\boldsymbol{z}), \tag{3.138}$$

$$J_{l,\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) = \int_{|\beta|\leqslant\tilde{\phi}(\theta)} I_{l,\boldsymbol{z}}(\beta)d\beta. \tag{3.139}$$

Si l'on note :

$$J_{l,\boldsymbol{z}} = \int_{\mathbf{R}} I_{l,\boldsymbol{z}}(\beta)d\beta, \tag{3.140}$$

on montre alors comme pour le lemme 3.5.10 :

Lemme 3.5.21. *Soit $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon>0$ arbitrairement petit. On suppose de plus que $d_1\geqslant 2$. L'intégrale $J_{l,\boldsymbol{z}}$ est absolument convergente, et on a :*

$$|J_{l,\boldsymbol{z}}(\tilde{\phi}(\theta)) - J_{l,\boldsymbol{z}}| \ll l^{\frac{4d_2}{3}+\varepsilon}P_1^{-\frac{K_1\theta}{3}+\frac{7}{3}\theta(d_1-1)+\varepsilon}.$$

On a de plus $|J_{\boldsymbol{z}}|\ll l^{\frac{4d_2}{3}+\varepsilon}$.

et on déduit des lemmes 3.5.20, 3.5.21 et 3.5.12 :

Lemme 3.5.22. *Soit $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose fixés $\theta \in [0,1]$ et $P_1 \geqslant 1$ tels que $l^{2d_2} P_1^{-d_1+3\theta(d_1-1)} < 1$. On suppose de plus que $K_1 > 7(d_1-1)$ et $d_1 \geqslant 2$. On a alors que*

$$N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} + O(E_2) + O(E_3),$$

avec

$$E_2 = d^{m-r+3-d_1} l^{4d_2+m-r} P^{m+1-d_1-\eta(\theta)},$$

$$E_3 = d^{m-r+\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon} l^{\frac{10d_2}{3}+m-r+\varepsilon} P_1^{m+1-d_1+\frac{7}{3}\theta(d_1-1)-\frac{K_1\theta}{3}+\varepsilon}$$

et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Corollaire 3.5.23. *Soit $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})$. On suppose que $K_1 > 7(d_1-1)$ et $d_1 \geqslant 2$. Il existe alors un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que :*

$$\begin{aligned} N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) &= \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}} d^{m-r-d_1} l^{m-r} P_1^{m+1-d_1} \\ &\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} l^{m-r+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta} \right), \end{aligned}$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$.

On pose à présent $P_1 = P_2^b$, avec $b \geqslant 1$ et on introduit la fonction

$$g_1'(b,\delta) = \left(1 - \frac{5d_2}{b} - \delta\right)^{-1} 5(d_1-1)\left(\frac{10d_2}{3b} + 2\delta\right), \tag{3.141}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2) = \operatorname{Card}\Big\{ &(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \\ &|\boldsymbol{y}| \leqslant d|\boldsymbol{x}|P_2,\ |\boldsymbol{z}| \leqslant P_2,\ \left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor \geqslant |\boldsymbol{z}|,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.142}$$

On a alors la proposition suivante qui est l'analogue de 3.5.15 :

Proposition 3.5.24. *On suppose $K_1 > 7(d_1-1)$, $d_1 \geqslant 2$, $P_1 = P_2^b$, $b > 5d_2$ et de plus que*

$$\frac{K_1}{3} - \frac{7}{3}(d_1-1) > g_1'(b,\delta).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2) &= d^{m-r-d_1} \left(\sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{z} \in P_2\mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}| \leqslant l}} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}} l^{m-r} \right) P_1^{m+1-d_1} \\ &\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(d_1-1)(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right), \end{aligned}$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit.

3.6 Quatrième étape

L'objectif est à présent de regrouper les résultats obtenus pour en déduire une formule asymptotique pour $N_d(P_1,P_2)$ avec n assez grand et P_1,P_2 quelconques.

On définit dans un premier temps b_1 comme le réel minimisant la fonction

(3.143)
$$b\mapsto \max\{2^{\tilde{d}}(bd_1+d_2),2^{\tilde{d}}(5b+2)(\tilde{d}+1),2^{d_1-1}(4(d_1-1)+2g_1(b,\delta)+\lceil bd_1+d_2+\delta\rceil)$$
$$2^{d_1-1}(7(d_1-1)+3g_1'(b,\delta)+\lceil bd_1+d_2+\delta\rceil)\}$$

sur l'intervalle $[5d_2,\infty[$, et on notera $\mathfrak{m}_1$ le minimum correspondant. On définit de même u_1 le réel minimisant

(3.144)
$$u\mapsto \max\{2^{\tilde{d}}(d_1+ud_2),7.2^{\tilde{d}}(\tilde{d}+1),2^{d_2-1}(2(d_2-1)+g_2(u,\delta)+\lceil d_1+ud_2+\delta\rceil)\}$$

sur $[5d_1,\infty[$ et $\mathfrak{m}_2$ le minimum correspondant. On note par ailleurs $\mathfrak{m}=\max\{\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2\}$.
Un calcul en $b=10d_2$ et $u=10d_1$ montre que

$$2^{d_1+d_2}\leqslant \mathfrak{m}\leqslant 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}. \tag{3.145}$$

À partir d'ici on fixe

$$\mu=\lceil b_1d_1+d_2+\delta\rceil,\quad \lambda=\lceil d_1+u_1d_2+\delta\rceil \tag{3.146}$$

On commence par établir le lemme suivant :

Lemme 3.6.1. *On suppose $n+2-\max\{\dim V_1^*,\dim V_2^*\}>\mathfrak{m}$. On a alors pour tout $P_2\geqslant 1$:*

$$\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{\boldsymbol{z}}d^{m-r-d_1}|\boldsymbol{z}|^{m-r}+\sum_{l=1}^{P_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{l,\boldsymbol{z}}d^{m-r-d_1}l^{m-r}$$
$$=d^{m-r-d_1}\mathfrak{S}_dJP_2^{n-r+1-d_2}+O(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon},d^{3-d_1}\}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}).$$

Démonstration. On choisit dans un premier temps P_1 tel que $P_1=P_2^{b_1}$. D'après les propositions 3.5.15 et 3.5.24, on a

$$\widetilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2)+\widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2) \tag{3.147}$$
$$=\left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{\boldsymbol{z}}|\boldsymbol{z}|^{m-r}+\sum_{l=1}^{P_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{l,\boldsymbol{z}}l^{m-r}\right)d^{m-r-d_1}P_1^{m+1-d_1}$$
$$+O\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon},d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}P_2^{n-r+1-d_2}\right)$$

Notons à présent

$$\tilde{N}_{d,1}(P_1,P_2) = \mathrm{Card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{z}\in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}|\leqslant P_1, \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}\right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right)\leqslant P_2,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\Big\}. \tag{3.148}$$

et

$$N_{d,1}(P_1,P_2) = \mathrm{Card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in \mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{z}\in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}|\leqslant P_1, \max\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}, |\boldsymbol{z}|\right)\leqslant P_2,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\Big\}. \tag{3.149}$$

On remarque d'une part que

$$N_{d,1}(P_1,P_2)\leqslant \widetilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2)+\widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2) = \widetilde{N}_{d,1}(P_1,P_2)\leqslant N_{d,1}(P_1,P_2+1),$$

et d'autre part, en utilisant la proposition 3.5.4 :

$$\begin{aligned} N_{d,1}(P_1,P_2) &= N_d(P_1,P_2) + O\left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap(\mathcal{A}_1^{\mu})^c(\mathbf{Z})} d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{m-r}\right)\\ &= N_d(P_1,P_2) + O\left(d^{m-r}P_1^{m+1}P_2^{m-r}P_2^{n-r+1-\mu}\right)\\ &= N_d(P_1,P_2) + O\left(d^{m-r}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right), \end{aligned}$$

par définition de μ.

Par ailleurs, étant donné que $n+2-\max\{\dim V_1^*,\dim V_2^*\} > 2^{\tilde{d}}(5b_1+2)(\tilde{d}+1)$, la proposition 3.3.1 donne :

$$\begin{aligned} N_d(P_1,P_2) = {}&\sigma_d d^{m-r-d_1}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}\\ &+ O\left(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right). \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned} &|\widetilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2)+\widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2)-N_d(P_1,P_2)|\\ &\quad\ll N_d(P_1,P_2+1)-N_d(P_1,P_2)+O\left(d^{m-r}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right)\\ &\qquad\ll \sigma_d P_1^{m+1-d_1}((P_2+1)^{n-r+1-d_2}-P_2^{n-r+1-d_2})\\ &\qquad + O\left(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right)\\ &\qquad\qquad\ll d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}, \end{aligned}$$

étant donné que $\sigma_d = d^{m-r-d_1}\mathfrak{S}_d J \ll d^{m-r-d_1}\max\{d^{\frac{d_1(r+1)}{2^{\tilde{d}}}}, d^2\}$, d'après la remarque 3.3.22.

Par conséquent,

$$\left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{\boldsymbol{z}}|\boldsymbol{z}|^{m-r}+\sum_{l=1}^{P_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})\\|\boldsymbol{z}|\leqslant l}}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{l,\boldsymbol{z}}l^{m-r}\right)d^{m-r-d_1}P_1^{m+1-d_1}$$
$$=\sigma_d P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}$$
$$+O\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right)$$

en simplifiant par $P_1^{m+1-d_1}$ on obtient le résultat. □

On démontre de même :

Lemme 3.6.2. *On suppose $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$. Alors pour tout $P_1 \geqslant 1$ et $d_2 \geqslant 2$:*

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})}\mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}}J_{d,\boldsymbol{x}}d^{m-r}|\boldsymbol{x}|^{m-r}=\sigma_d P_1^{m+1-d_1}$$
$$+O(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{4d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}).$$

Pour le cas $d_2 = 1$, en notant $u_1' = d_1 + \delta$, $\mathfrak{m}_2' = 7d_1 2^{d_1-1}$ et $\lambda' = \lceil d_1 + u_1' + \delta\rceil$ on trouve :

Lemme 3.6.3. *On suppose $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}' = \max\{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2'\}$. Alors si $d_2 = 1$ et $P_1 \geqslant 1$:*

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in P_1\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})}\frac{\mathrm{Vol}(C_{d,\boldsymbol{x}})}{\det(\Lambda_{d,\boldsymbol{x}})}=\sigma_d P_1^{m+1-d_1}$$
$$+O(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}).$$

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.6.4. *On suppose $d_1 \geqslant 2$, $P_1 \geqslant P_2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$. On a alors*

$$\widetilde{N}_{d,1}(P_1,P_2)=\sigma_d P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}$$
$$+O\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right).$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $b \geqslant b_1 \geqslant 5d_2$. On a alors puisque $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$ et puisque les fonctions g_1 et g_1' sont décroissantes en b :

$$\frac{K_1}{2} - 2(d_1-1) > g_1(b_1,\delta) > g_1(b,\delta),$$

$$\frac{K_1}{3} - \frac{7}{3}(d_1-1) > g_1'(b_1,\delta) > g_1'(b,\delta).$$

Par conséquent on peut appliquer les propositions 3.5.15 et 3.5.24 et on a alors

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2) + \widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2)\\
&= \left(\sum_{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} |\boldsymbol{z}|^{m-r} + \sum_{l=1}^{P_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in P_2\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}} l^{m-r} \right) d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1}\\
&\qquad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2} \right)\\
&\qquad\qquad = \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2}\\
&\qquad\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme précédent. On remarque d'autre part que

$$\widetilde{N}_{d,1}^{(1)}(P_1,P_2) + \widetilde{N}_{d,1}^{(2)}(P_1,P_2) = \widetilde{N}_{d,1}(P_1,P_2)$$

et ainsi que

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}_{d,1}(P_1,P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2}\\
&\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right).
\end{aligned}$$

Si l'on suppose à présent $b < b_1$, on a alors

$$K > \max\{b_1 d_1 + d_2, (5b_1+2)(\tilde{d}+1) > \max\{b d_1 + d_2, (5b+2)(\tilde{d}+1)\}.$$

Par la proposition 3.3.1, on a donc

$$\begin{aligned}
N_d(P_1,P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r+1-d_2}\\
&\quad + O\left(d^{m-r} \max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1-\delta} P_2^{n-r+1-d_2-\delta} \right).
\end{aligned}$$

Or comme dans la démonstration du lemme 3.6.1, on a que :

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,1}(P_1,P_2) &= N_d(P_1,P_2)\\ &+ O\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),\end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration. $\square$

Si l'on note

$$(3.150)\quad \tilde{N}_{d,2}(P_1,P_2) = \mathrm{Card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}^{n+2} \mid \boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z}),\ |\boldsymbol{x}|\leqslant P_1,\\ \max\left(\left\lfloor\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}\right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right)\leqslant P_2,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\Big\},$$

en utilisant les propositions 3.4.17 et 3.4.21, on a un résultat analogue :

Proposition 3.6.5. *Si l'on suppose $d_1, d_2 \geqslant 2$, $P_1 \leqslant P_2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$, On a alors*

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,2}(P_1,P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}\\ &+ O\left(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{\tilde{d}}+\varepsilon}, d^{5d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}P_2^{n-r+1-d_2}\right).\end{aligned}$$

Si l'on a $d_1 \geqslant 2$, $d_2 = 1$, $P_1 \leqslant P_2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}'$, alors

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,2}(P_1,P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r}\\ &+ O\left(d^{m-r}\max\{d^{d_1(r+1)/2^{d_1-1}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\}P_1^{m+1-d_1-\delta}P_2^{n-r}\right).\end{aligned}$$

Considérons à présent l'ouvert de Zariski

$$(3.151)\qquad U = \mathcal{A}_2^{\lambda}\times\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{m-r}\times\mathcal{A}_1^{\mu}\subset\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+2}.$$

On note alors

$$(3.152)\quad \widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2) = \mathrm{Card}\big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}^{n+2}\cap U \mid |\boldsymbol{x}|\leqslant P_1,\\ \max\left(\left\lfloor\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|}\right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right)\leqslant P_2,\ F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\Big\},$$

On en déduit :

Proposition 3.6.6. *Si l'on suppose $d_1, d_2 \geqslant 2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$, on a alors*

$$\begin{aligned}&\widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2) = \sigma_d P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}\\ &+O_\delta\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{5d_1}\}P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r+1-d_2}\min\{P_1,P_2\}^{-\delta}\right),\end{aligned}$$

pour $\delta > 0$ arbitrairement petit. Pour $d_1 \geqslant 2$, $d_2 = 1$, $P_1 \leqslant P_2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}'$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2) &= \sigma_d P_1^{m+1-d_1} P_2^{n-r} \\ &+ O_\delta\left(d^{m-r}\max\{d^{\frac{d_1(r+1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon}, d^{3-d_1}\} P_1^{m+1-d_1}P_2^{n-r}\min\{P_1,P_2\}^{-\delta}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. On suppose $P_1 \geqslant P_2$. On évalue le terme d'erreur

$$\begin{aligned}|\widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2) - \tilde{N}_{d,1}(P_1,P_2)| &\ll \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})\cap P_1\mathcal{B}_1} d^{m-r}P_1^{m-r}P_2^{n-r+1} \\ &\ll d^{m-r}P_1^{m+1-\lambda}P_2^{n-r+1} \\ &\ll d^{m-r}P_1^{m+1-d_1-u_1d_2-\delta}P_2^{n-r+1} \\ &\ll d^{m-r}P_1^{m+1-d_1-\delta}P_2^{n-r+1-d_2}\end{aligned}$$

car $u_1 \geqslant 1$. Pour $P_1 \leqslant P_2$, on obtient le même résultat avec $|\widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2) - \tilde{N}_{d,2}(P_1,P_2)|$. □

3.7 Cinquième étape

3.7.1 Un résultat intermédiaire

Nous allons à présent utiliser la formule obtenue pour $\widetilde{N}_{d,U}(P_1,P_2)$ dans la proposition 3.6.6 pour trouver une formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$. Pour résoudre ce problème, nous allons appliquer une version légèrement modifiée (tenant compte de la dépendance en d des fonctions de comptage) de la méthode développée par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour le cas les hypersurfaces diagonales des espaces multiprojectifs, et reprise dans la section 9 de [Sch2].

Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on considère une fonction $f_d : \mathbf{N}^2 \to [0,+\infty[$. Conformément aux notations de [B-B], on dira que f_d est une $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, \upsilon, \delta)$-fonction si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. On a
$$\sum_{\substack{k\leqslant K\\ l\leqslant L}} f_d(k,l) = C_d K^{\beta_1}L^{\beta_2} + O(d^\upsilon K^{\beta_1}L^{\beta_2}\min\{K,L\}^{-\delta})$$
pour tous $K, L \geqslant 1$.
2. Il existe des fonctions $c_{1,d}, c_{2,d} : \mathbf{N} \to [0,+\infty[$ telles que :
$$\sum_{l\leqslant L} f_d(k,l) = c_{d,1}(k)L^{\beta_2} + O\left(k^D d^\upsilon L^{\beta_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $L \geqslant 1$ et $k \leqslant d^{-1}L^\alpha$,

$$\sum_{k \leqslant K} f_d(k,l) = c_{d,2}(l)K^{\beta_1} + O\left(l^D d^\upsilon K^{\beta_1-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $K \geqslant 1$ et $l \leqslant d^{-1}K^\alpha$.

Nous allons alors démontrer, en nous inspirant des arguments de [Sch2, §9], la proposition suivante qui est une adaptation de [B-B, Théorème 2.1] pour le cas d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre d :

Proposition 3.7.1. *Si $(f_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ est une famille de $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, \upsilon, \delta)$-fonctions avec $(C_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ telle que $C_d \ll d^\upsilon$, alors on a, pour tout d, la formule asymptotique :*

$$\sum_{k^{\beta_1} l^{\beta_2} \leqslant P} f_d(k,l) = C_d P \log(P) + O(d^{\upsilon+\delta} \log(d) P).$$

On considère $(f_d)_{d \in \mathbf{N}^*}$ une famille de $(\beta_1, \beta_2, C_d, D, \alpha, \upsilon, \delta)$-fonctions, avec $C_d \ll d^\upsilon$ et on définit

$$F_d(K,L) = \sum_{k \leqslant K} \sum_{l \leqslant L} f_d(k,l).$$

Lemme 3.7.2. *Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on a les estimations :*

$$\sum_{k \leqslant K} c_{d,1}(k) = C_d K^{\beta_1} + O\left(d^\upsilon K^{\beta_1-\delta}\right),$$

$$\sum_{l \leqslant L} c_{d,2}(l) = C_d L^{\beta_2} + O\left(d^\upsilon L^{\beta_2-\delta}\right).$$

Démonstration. D'après la condition 1, on a

$$F_d(K,L) = C_d K^{\beta_1} L^{\beta_2} + O(d^\upsilon K^{\beta_1} L^{\beta_2} \min\{K,L\}^{-\delta}). \tag{3.153}$$

Pour $L \geqslant 1$ et $K \leqslant d^{-1}L^\alpha$, la condition 2 implique :

$$\begin{aligned} F_d(K,L) &= \sum_{k \leqslant K} \left(\sum_{l \leqslant L} f_d(k,l) \right) \\ &= \sum_{k \leqslant K} \left(c_{d,1}(k) L^{\beta_2} + O\left(k^D d^\upsilon L^{\beta_2-\delta}\right) \right) \\ &= L^{\beta_2} \sum_{k \leqslant K} c_{d,1}(k) + O\left(d^\upsilon K^{D+1} L^{\beta_2-\delta}\right). \end{aligned}$$

En choisissant L tel que $dK \leqslant L^\alpha$ et $K^{D+1}L^{-\delta} = O(K^{\beta_1-\delta})$, on obtient alors en utilisant la formule (3.153) :

$$\sum_{k \leqslant K} c_{d,1}(k) = C_d K^{\beta_1} + O\left(d^\upsilon K^{\beta_1-\delta}\right).$$

□

Lemme 3.7.3. *On fixe un réel μ tel que*

$$0 < \beta_1\mu < \frac{1}{2}, \tag{3.154}$$

$$\mu\left(1+\alpha\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \leqslant \frac{\alpha}{\beta_2}, \tag{3.155}$$

$$\mu\left(D-\beta_1+1+\delta\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) < \frac{\delta}{2\beta_2}. \tag{3.156}$$

On pose

$$T_{d,1} = \sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu} \sum_{P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}\leqslant P/k^{\beta_1}} f_d(k,l).$$

On a alors

$$T_{d,1} = \beta_1\mu C_d P\log(P) + O(d^{\upsilon+\delta}\log(d)P).$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que :

$$T_{d,1} = \sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu} \sum_{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P} f_d(k,l) - F_d(d^{-1}P^\mu, P^{\frac{1}{2\beta_2}})$$

avec

$$F_d(d^{-1}P^\mu, P^{\frac{1}{2\beta_2}}) = O\left(d^\upsilon P^{\beta_1\mu+\frac{1}{2}}\right) = O(d^\upsilon P).$$

D'autre part, par l'hypothèse (3.155), on a pour tout $k \leqslant d^{-1}P^\mu$,

$$k^{1+\alpha\frac{\beta_1}{\beta_2}} \leqslant d^{-(1+\alpha\frac{\beta_1}{\beta_2})}P^{(1+\alpha\frac{\beta_1}{\beta_2})\mu} \leqslant d^{-1}P^{\frac{\alpha}{\beta_2}},$$

et donc $k \leqslant d^{-1}\left(P^{\frac{1}{\beta_2}}/k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right)^\alpha$. La condition 2 donne alors :

$$\begin{aligned}
T_{d,1} &= \sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu}\left(c_{d,1}(k)\left(P^{\frac{1}{\beta_2}}/k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right)^{\beta_2} + O\left(k^D d^\upsilon\left(P^{\frac{1}{\beta_2}}/k^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right)^{\beta_2-\delta}\right)\right) + O(d^\upsilon P) \\
&= \left(\sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu}\frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}}\right)P + O\left(\left(\sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu} k^{D-\beta_1+\delta\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right)d^\upsilon P^{1-\frac{\delta}{\beta_2}}\right) + O(d^\upsilon P) \\
&= \left(\sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu}\frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}}\right)P + O\left(P^{\mu(D-\beta_1+1+\delta\frac{\beta_1}{\beta_2})}\right)d^\upsilon P^{1-\frac{\delta}{\beta_2}} + O(d^\upsilon P) \\
&= \left(\sum_{k\leqslant d^{-1}P^\mu}\frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}}\right)P + O(d^\upsilon P).
\end{aligned}$$

Il nous faut à présent évaluer $\sum_{k\leqslant d^{-1}P^{\mu}}\frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}}$. Par sommation par parties, et en utilisant le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant d^{-1}P^{\mu}}\frac{c_{d,1}(k)}{k^{\beta_1}} &= d^{\beta_1}P^{-\mu\beta_1}\sum_{k\leqslant d^{-1}P^{\mu}}c_{d,1}(k)+\beta_1\int_1^{d^{-1}P^{\mu}}t^{-\beta_1-1}\sum_{k\leqslant t}c_{d,1}(k)dt\\ &= d^{\beta_1}P^{-\mu\beta_1}\left(C_d d^{-\beta_1}P^{\mu\beta_1}+O\left(d^{\upsilon-\beta_1+\delta}P^{\mu\beta_1-\delta\mu}\right)\right)\\ &\quad+\beta_1\int_1^{d^{-1}P^{\mu}}t^{-\beta_1-1}\left(C_d t^{\beta_1}+O(d^{\upsilon}t^{\beta_1-\delta})\right)dt\\ &= C_d+O\left(d^{\upsilon+\delta}P^{-\delta\mu}\right)+\beta_1 C_d\log(P^{\mu})+O(d^{\upsilon}\log(d))\\ &= \beta_1 C_d\log(P^{\mu})+O(d^{\upsilon+\delta})\end{aligned}$$

□

Lemme 3.7.4. *On suppose* $0<\mu<\min\{\frac{1}{2\beta_1},\frac{1}{2\beta_2}\}$*, et on définit :*

$$T_{d,2}=\sum_{d^{-1}P^{\mu}<k\leqslant P^{\frac{1}{2\beta_1}}}\ \sum_{P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}\leqslant P/k^{\beta_1}}f_d(k,l).$$

On a alors

$$T_{d,2}=(\frac{1}{2}-\beta_1\mu)C_dP\log(P)+O(d^{\upsilon+\delta}\log(d)P).$$

Démonstration. On fixe $d\in\mathbf{N}^*$. On considère un entier J assez grand et on définit $\theta>0$ via :

$$(1+\theta)^J=dP^{\frac{1}{2\beta_1}-\mu}.$$

On considère alors des réels $d^{-1}P^{\mu}\leqslant K<K'\leqslant P^{\frac{1}{2\beta_1}}$ avec $K'=K(1+\theta)$. On définit alors :

$$V(K)=\sum_{K<k\leqslant K'}\ \sum_{P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}\leqslant P/k^{\beta_1}}f_d(k,l),$$

$$V_-(K)=\sum_{K<k\leqslant K'}\ \sum_{P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}\leqslant P/(K')^{\beta_1}}f_d(k,l),$$

$$V_+(K)=\sum_{K<k\leqslant K'}\ \sum_{P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}\leqslant P/K^{\beta_1}}f_d(k,l),$$

et on remarque que :

$$V_-(K)\leqslant V(K)\leqslant V_+(K).$$

Par ailleurs,

$$V_+(K) = F_d\left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) - F_d\left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) - F_d\left(K', P^{\frac{1}{2\beta_2}}\right) + F_d\left(K, P^{\frac{1}{2\beta_2}}\right).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} F_d&\left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) - F_d\left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) \\ &= C_d((K')^{\beta_1} - K^{\beta_1})PK^{-\beta_1} + O\left(d^{\upsilon}(K')^{\beta_1}PK^{-\beta_1}\min\{K, P^{\frac{1}{\beta_2}}(K')^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}\}^{-\delta}\right) \\ &= C_d((1+\theta)^{\beta_1} - 1)P + O\left(d^{\upsilon+\delta}(1+\theta)^{\beta_1}P^{1-\mu\delta}\right), \end{aligned}$$

d'après (3.154). En remarquant que $(1+\theta)^{\beta_1} = 1 + \beta_1\theta + O(\theta^2)$, on obtient :

$$F_d\left(K', P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) - F_d\left(K, P^{\frac{1}{\beta_2}}/K^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right) = C_d\beta_1\theta P + O(d^{\upsilon+\delta}P^{1-\mu\delta}) + O(d^{\upsilon}\theta^2 P).$$

De la même manière on trouve

$$F_d\left(K', P^{\frac{1}{2\beta_2}}\right) - F_d\left(K, P^{\frac{1}{2\beta_2}}\right) = C_d\beta_1\theta K^{\beta_1}P^{\frac{1}{2}} + O(d^{\upsilon}P^{1-\mu\delta}) + O(d^{\upsilon}\theta^2 P).$$

On en déduit :

$$V_+(K) = C_d\beta_1\theta P + C_d\beta_1\theta K^{\beta_1}P^{\frac{1}{2}} + O(d^{\upsilon}P^{1-\mu\delta}) + O(d^{\upsilon}\theta^2 P).$$

Par des arguments analogues, on obtient la même estimation pour $V_-(K)$, et donc

$$V(K) = C_d\beta_1\theta P + C_d\beta_1\theta K^{\beta_1}P^{\frac{1}{2}} + O(d^{\upsilon+\delta}P^{1-\mu\delta}) + O(d^{\upsilon}\theta^2 P).$$

On pose à présent, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j < J$,

$$K_j = d^{-1}P^{\mu}(1+\theta)^j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T_{d,2} &= \sum_{0\leqslant j<J} V(K_j) \\ &= C_d\beta_1(J\theta)P + C_d\beta_1\theta P^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{J-1}K_j^{\beta_1} + O(d^{\upsilon+\delta}JP^{1-\mu\delta}) + O(d^{\upsilon}J\theta^2 P). \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\theta\sum_{j=0}^{J-1}K_j^{\beta_1} &= \theta d^{-\beta_1}P^{\beta_1\mu}\frac{(1+\theta)^{J\beta_1}-1}{(1+\theta)^{\beta_1}-1}\\ &= d^{-\beta_1}P^{\beta_1\mu}\frac{d^{\beta_1}P^{\frac{1}{2}-\beta_1\mu}-1}{\beta_1+O(\theta)}\\ &= \frac{1}{\beta_1}P^{\frac{1}{2}}+O(d^{-\beta_1}P^{\beta_1\mu})+O(P^{\frac{1}{2}}\theta).\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}T_{d,2} &= C_d\beta_1(J\theta)P+C_dP+O(d^{\upsilon-\beta_1}P^{\frac{1}{2}+\beta_1\mu})\\ &\quad +O(d^{\upsilon}\theta^2P)+O(d^{\upsilon+\delta}JP^{1-\mu\delta})+O(d^{\upsilon}J\theta^2P)\\ &= C_d\beta_1(J\theta)P+O(d^{\upsilon}J\theta^2P)+O(d^{\upsilon}P)+O(d^{\upsilon+\delta}JP^{1-\mu\delta}).\end{aligned}$$

On choisit à présent :

$$J=\left\lfloor P^{\frac{\mu\delta}{2}}\left(\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d)\right)\right\rfloor$$

Par définition de θ on a :

$$J\log(\theta+1)=\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d),$$

et donc

$$\begin{aligned}\theta = J^{-1}&\left(\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d)\right)\\ &+O\left(J^{-2}\left(\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d)\right)^2\right),\end{aligned}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}J\theta = &\left(\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d)\right)\\ &+O\left(P^{-\frac{\mu\delta}{2}}\left(\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)\log(P)+\log(d)\right)\right).\end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned}T_{d,2}=C_d\beta_1&\left(\frac{1}{2\beta_1}-\mu\right)P\log(P)+C_d\beta_1\log(d)P\\ &+O(d^{\upsilon+\delta}\log(d)P^{1-\frac{\mu\delta}{2}}\log(P))+O(d^{\upsilon}P),\end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

□

Démonstration de la proposition 3.7.1. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P} f_d(k,l) &= \sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}}} f_d(k,l) + \sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<k^{\beta_1}}} f_d(k,l) - F_d(P^{\frac{1}{2\beta_1}},P^{\frac{1}{2\beta_2}})\\ &= \sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}}} f_d(k,l) + \sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<k^{\beta_1}}} f_d(k,l) + O(d^{\upsilon}P).\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<l^{\beta_2}}} f_d(k,l) = T_{d,1}+T_{d,2} = \frac{1}{2}C_dP\log(P)+O(d^{\upsilon+\delta}\log(d)P),$$

d'après les deux lemmes précédents. Par symétrie, on obtient exactement le même résultat pour $\sum_{\substack{k^{\beta_1}l^{\beta_2}\leqslant P\\ P^{\frac{1}{2}}<k^{\beta_1}}} f_d(k,l)$, et la proposition est démontrée. □

Remarque 3.7.5. *Par les mêmes arguments, on démontre, sous les mêmes hypothèses que :*

$$\sum_{k^{\beta_1}(l+1)^{\beta_2}\leqslant P} f_d(k,l) = C_dP\log(P)+O(d^{\upsilon+\delta}\log(d)P).$$

Cette remarque nous sera utile dans ce qui va suivre.

3.7.2 Formule asymptotique pour $N_{d,U}(B)$

L'idée est alors d'appliquer la proposition 3.7.1 à la fonction $h_d(k,l)$ définie en (3.12). Pour cela nous allons montrer que cette fonction est bien une $(\beta_1,\beta_2,C_d,D,\alpha,\upsilon,\delta)$-fonction (pour des constantes $C_d,\delta,\beta_1,\beta_2,\alpha,\upsilon,D$ que nous préciserons).

Remarquons avant tout que, d'après la proposition 3.6.6, la fonction h vérifie bien la condition 1 avec $\beta_1=m+1-d_1$, $\beta_2=n-r+1-d_2$, $C_d=\sigma_d$ et $\upsilon=m-r+\max\{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon,5d_1\}$. D'autre part, par les corollaires 3.5.14 et 3.5.23, pour tout $\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$ et $P_2\leqslant P_1$, on a

$$N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{\boldsymbol{z}}d^{m-r-d_1}l^{m-r}P_1^{m+1-d_1}+O\left(d^{\upsilon}l^{m-r+4d_2}P_1^{m+1-d_1-\delta}\right)$$

$$N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}}J_{l,\boldsymbol{z}}d^{m-r-d_1}l^{m-r}P_1^{m+1-d_1}+O\left(d^{\upsilon}l^{m-r+4d_2}P_1^{m+1-d_1-\delta}\right)$$

uniformément pour tout $\boldsymbol{z}, l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$ et $\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z})$. En notant

(3.157)
$$\widetilde{N}_{d,U,l}(P_1) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ |\boldsymbol{x}| \leqslant P_1, \quad l = \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right)\}$$

On a alors que

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,U,l}(P_1) &= \sum_{k \leqslant P_1} h_d(k,l) \\ &= \sum_{\substack{\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|=l}} N_{d,\boldsymbol{z}}(P_1) + \sum_{\substack{\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}} N_{d,l,\boldsymbol{z}}(P_1) + O\left(d^{m-r} l^{n-r+1} P_1^{m+1-\lambda}\right) \\ &= \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|=l}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}_1^{\mu}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}}\right) l^{m-r} d^{m-r-d_1} P_1^{m+1-d_1} \\ &\qquad + O\left(d^{\upsilon} l^{n-r+1+4d_2} P_1^{m+1-d_1-\delta}\right)\end{aligned}$$

uniformément pour tout $l < P_1^{\frac{d_1-1}{2d_2}}$. On a de même, d'après le corollaire 3.4.15 :

$$N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) = \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} d^{m-r} k^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} + O\left(d^{\upsilon} k^{m-r+4d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right),$$

uniformément pour tout $k < d^{-1} P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z})$. En notant

$$\widetilde{N}_{d,U,k}(P_2) = \operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ |\boldsymbol{x}| = k \quad \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor, |\boldsymbol{z}|\right) \leqslant P_2\} \tag{3.158}$$

On a alors que

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{d,U,k}(P_2) &= \sum_{l \leqslant P_2} h_d(k,l) \\ &= \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{x}|=k}} N_{d,\boldsymbol{x}}(P_2) + O\left(d^{m-r} k^{m+1} P_2^{n-r+1-\mu}\right) \\ &= \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_2^{\lambda}(\mathbf{Z}) \\ |\boldsymbol{x}|=k}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} k^{m-r} d^{m-r} P_2^{n-r+1-d_2} \\ &+ O\left(d^{\upsilon} k^{m+1+4d_1} P_2^{n-r+1-d_2-\delta}\right)\end{aligned}$$

uniformément pour tout $k < d^{-1}P_2^{\frac{d_2-1}{2d_1}}$. Par conséquent, h_d vérifie bien la condition 2 avec

$$c_{d,1}(k) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_2^\lambda(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{x}|=k}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{x}} J_{d,\boldsymbol{x}} k^{m-r} d^{m-r},$$

$$c_{d,2}(l) = \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{z}|=l}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{\boldsymbol{z}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{z}\in\mathcal{A}_1^\mu(\mathbf{Z})\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant l}} \mathfrak{S}_{d,\boldsymbol{z}} J_{l,\boldsymbol{z}} \right) l^{m-r} d^{m-r-d_1},$$

$$D = \max\{m+1+4d_1, n-r+1+4d_2\}$$

et

$$\alpha = \min\{\frac{d_2-1}{2d_1}, \frac{d_1-1}{2d_2}\}.$$

On a donc montré que h_d est une $(m+1-d_1, n-r+1-d_2, \sigma_d, D, \alpha, \upsilon, \delta)$-fonction, et donc en notant

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{d,U}^{(1)}(B) = \operatorname{card}\big\{&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}),\\ &F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1} \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor, |\boldsymbol{z}| \right)^{n-r+1-d_2} \leqslant B \Big\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{d,U}^{(2)}(B) = \operatorname{card}\big\{&(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}^{n+2} \cap U \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}),\\ &F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1} \max\left(\left\lfloor \frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|} \right\rfloor + 1, |\boldsymbol{z}|+1 \right)^{n-r+1-d_2} \leqslant B \Big\}\end{aligned}$$

la proposition 3.7.1 et la remarque 3.7.5 donnent :

$$\tilde{N}_{d,U}^{(i)}(B) = \sigma_d B \log(B) + O\left(d^\upsilon \log(d) B\right)$$

pour $i \in \{1,2\}$. Par ailleurs, on observe que

$$\tilde{N}_{d,U}^{(2)}(B) \leqslant N_{d,U}(B) \leqslant \tilde{N}_{d,U}^{(1)}(B),$$

et on en déduit finalement :

Proposition 3.7.6. *Si $d_1, d_2 \geqslant 2$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$, ou si $d_1 \geqslant 2$, $d_2 = 1$ et $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}'$, alors pour tout $B \geqslant 1$, on a la formule asymptotique :*

$$N_{d,U}(B) = \sigma_d B \log(B) + O\left(d^{\upsilon+\delta} \log(d) B\right),$$

pour un certain $\delta > 0$ arbitrairement petit.

Remarque 3.7.7. *Nous avons vu (voir* (3.145)*) que* $\mathfrak{m} \leqslant 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}$. *De la même manière on montre que* $\mathfrak{m}' \leqslant 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}$. *Par conséquent, la formule asymptotique ci-dessus est en particulier vraie lorsque* $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > 13d_2(d_1+d_2)2^{d_1+d_2}$.

3.8 Conclusion et interprétation des constantes

Nous somme à présent en mesure de donner une formule asymptotique pour

$$\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{4}\operatorname{card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U \cap \mathbf{Z}^{n+2} \mid \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{x}) = 1,\ \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 1$$
$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \leqslant B\}.$$

On remarque en effet que si $N_{d,e}(B)$ désigne

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}\{(d\boldsymbol{x},e\boldsymbol{y},e\boldsymbol{z}) \in U\cap(d\mathbf{Z}^{r+1}\times e\mathbf{Z}^{n-r+1}) \mid F(d\boldsymbol{x},e\boldsymbol{y},e\boldsymbol{z}) = 0,\ H(d\boldsymbol{x},e\boldsymbol{y},e\boldsymbol{z}) \leqslant B\} \\
&\quad = \operatorname{card}\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in U \cap (\mathbf{Z}^{r+1}\times\mathbf{Z}^{n-r+1}) \mid F(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0, \\
&\quad |\boldsymbol{x}|^{m+1-d_1}\max\{\frac{|\boldsymbol{y}|}{d|\boldsymbol{x}|},|\boldsymbol{z}|\}^{n-r+1-d_2} \leqslant B/(d^{m+1-d_1}e^{n-r+1-d_2})\Big\} \\
&\qquad = N_{d,U}(B/(d^{m+1-d_1}e^{n-r+1-d_2}))
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{N}_{k,l}(B) = \operatorname{card}\{(k\boldsymbol{x},l\boldsymbol{y},l\boldsymbol{z}) \in U\cap(k\mathbf{Z}^{r+1}\times l\mathbf{Z}^{m-r}\times l\mathbf{Z}^{n-m+1}) \mid \operatorname{pgcd}(\boldsymbol{x}) = 1,$$
$$\operatorname{pgcd}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 1,\ \ F(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ H(k\boldsymbol{x},l\boldsymbol{y},l\boldsymbol{z}) \leqslant B\}$$

(pour $d,e,k,l \in \mathbf{N}$), alors on a

$$N_{d,e}(B) = \sum_{d|k}\sum_{e|l}\tilde{N}_{k,l}(B).$$

Par inversions de Möbius successives, et en utilisant la proposition 3.7.6, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_U(B) = \frac{1}{4}\tilde{N}_{1,1}(B) &= \frac{1}{4}\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\mu(d)\sum_{e\in\mathbf{N}^*}\mu(e)N_{d,e}(B)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{d,e\in\mathbf{N}^*}\mu(d)\mu(e)N_{d,U}(B/(d^{m+1-d_1}e^{n-r+1-d_2}))\\
&= \frac{1}{4}\sum_{d,e\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)\mu(e)}{d^{m+1-d_1}e^{n-r+1-d_2}}\sigma_d B\log(B)\\
&+ O\left(\sum_{d,e\in\mathbf{N}^*}\frac{1}{d^{m+1-d_1}e^{n-r+1-d_2}}d^{\upsilon+\delta}\log(d)B\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{e\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(e)}{e^{n-r+1-d_2}}\right)\left(\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}}\sigma_d\right)B\log(B) + O\left(B\right),
\end{aligned}
$$

car $\upsilon = m-r+\max\{\frac{(r+1)(d_1-1)}{2^{d_1-1}}+\varepsilon, 5d_1\} < (m+1-d_1)+2$, pour r choisi assez grand, i.e. pour $r \geqslant 6d_1-3$. Par ailleurs on peut réécrire

$$\sum_{e\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(e)}{e^{n-r+1-d_2}} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)$$

et

$$\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}}\sigma_d = J\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{m+1-d_1}}\mathfrak{S}_d d^{m-r-d_1} = J\mathfrak{S}$$

pour

$$\mathfrak{S} = \sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{r+1}}\mathfrak{S}_d. \tag{3.159}$$

On obtient donc finalement

Proposition 3.8.1. *Pour $d_1, d_2 \geqslant 2$, $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}$ et $r \geqslant 6d_1-3$, on a :*

$$\mathcal{N}_U(B) = \sigma B\log(B) + O(B),$$

lorsque $B \to \infty$, où l'on a noté $\sigma = \frac{1}{4}J\mathfrak{S}\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)$. On a de plus la même formule pour $d_1 \geqslant 2$, $d_2 = 1$, $n+2-\max\{\dim V_1^*, \dim V_2^*\} > \mathfrak{m}'$ et $r \geqslant 6d_1-3$.

Nous allons à présent donner une interprétation des constantes introduites, et démontrer que l'expression obtenue est bien en accord avec les formules conjecturées par Peyre dans [Pe1], et nous aurons ainsi démontré le théorème 3.1.1.

Rappelons que l'on a noté $\pi : X_0 \to X$ la projection du torseur universel $X_0 = (\mathbf{A}^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times (\mathbf{A}^{n-r+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ sur la variété torique ambiante X. On considère un point $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in Y_0$ tel que $\frac{\partial F}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \neq \mathbf{0}$, où

$$t_j = \begin{cases} x_j & \text{si} \quad j \in \{0, ..., r\} \\ y_j & \text{si} \quad j \in \{r+1, ..., m\} \\ z_j & \text{si} \quad j \in \{m+1, ..., n+1\} \end{cases}$$

et on note $P = \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. La forme de Leray ω_L sur un voisinage de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ sur lequel $\frac{\partial F}{\partial t_j} \neq \mathbf{0}$ est alors donnée par

$$\omega_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad = \quad \frac{(-1)^{n+2-j}}{\frac{\partial F}{\partial t_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})} dt_0 \ \wedge \ ... \ \wedge \ \widehat{dt_j} \ \wedge \ ... \ \wedge \ dt_{n+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Pour toute place $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$ la forme de Leray induit une mesure locale $\omega_{L,\nu}$.

On suppose à présent que le point $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est tel que, par exemple, $x_0 \neq 0$, $z_{m+1} \neq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \neq 0$. Pour toute place ν de $\mathbf{Q}$, on considère le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \rho : X_{\mathbf{Q}_\nu} & \to & \mathbf{A}^{n-1}_{\mathbf{Q}_\nu} \\ \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & \mapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_r}{x_0}, \frac{y_{r+1}}{x_0 z_{m+1}}, ..., \frac{y_m}{x_0 z_{m+1}}, \frac{z_{m+2}}{z_{m+1}}, ..., \frac{z_n}{z_{m+1}} \right). \end{array}$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de P noté V sur lequel ρ est bien défini et induit un difféomorphisme analytique sur $\rho(V)$. On pose $W = \pi^{-1}(V)$. Si l'on note

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{u} = (1, u_1, ..., u_r) \\ \boldsymbol{v} = (v_{r+1}, ..., v_m) \\ \boldsymbol{w} = (1, w_{m+2}, ..., w_{n+1}) \end{array},$$

la mesure de Tamagawa ω_ν est définie par

$$\rho_* \omega_\nu = \frac{du_{1,\nu} ... du_{r,\nu} dv_{r+1,\nu} ... dv_{m,\nu} dw_{m+2,\nu} ... dw_{n,\nu}}{h_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \left| \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \right|_\nu},$$

où w_{n+1} est implicitement défini par $F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$, et

$$h_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = h_\nu^{(1)}(\boldsymbol{u}) h_\nu^{(2)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

pour

$$\begin{array}{l} h_\nu^{(1)}(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|_\nu^{m+1-d_1} \\ h_\nu^{(2)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \max \left(\frac{|\boldsymbol{v}|_\nu}{|\boldsymbol{u}|_\nu}, |\boldsymbol{w}|_\nu \right)^{n-r+1-d_2} \end{array},$$

où pour tout vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_N)$,

$$|\boldsymbol{x}|_\nu = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_\nu.$$

3.8.1 Étude de l'intégrale singulière J

Rappelons que l'intégrale J est définie par

$$J = \int_{\mathbf{R}} \int_{\substack{|\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant 1\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant 1}} e(\beta F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{z}d\beta.$$

et cette intégrale est absolument convergente. On pose par ailleurs :

$$\sigma_\infty(Y) = \int_{\pi^{-1}(Y)\cap\{\substack{|\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant 1\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant 1}\}} \omega_{L,\infty}.$$

Nous allons montrer que l'intégrale J coïncide avec $\sigma_\infty(Y)$. Pour cela nous allons utiliser des résultats issus de [Pe2]. Introduisons les notations suivantes :

Soit X une variété définie sur un corps de nombres k. On pose $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et

$$\mathbf{A}_{C_{\mathrm{eff}}(\bar{X}),k} = \mathrm{Spec}(\bar{k}[C_{\mathrm{eff}}(\bar{X}) \cap X^*(T_{NS})]^{\mathcal{G}}),$$

et si $\mathcal{T}_X$ est un torseur universel sur X, on note

$$\widehat{\mathcal{T}}_X = \mathcal{T}_X \times^{T_{NS}} \mathbf{A}_{-C_{\mathrm{eff}}(\bar{X}),k}.$$

On dit qu'une hypersurface Y de X *vérifie l'hypothèse* (G) s'il existe une désingularisation $\mathbf{A}_\Sigma$ de $\mathbf{A}_{C_{\mathrm{eff}}(\bar{X}),k}$ équivariante sous l'action du tore T_{NS}. D'autre part, si L est un diviseur de Y appartenant à $C_{\mathrm{eff}}(Y)$, on pose

$$\delta(L) = \inf\{\langle x, L\rangle,\ x \in C_{\mathrm{eff}}(Y)^\vee \cap \mathrm{Pic}(Y)^\vee \setminus \{0\}.$$

On note $\delta(Y) = \delta(\omega_Y^{-1}) \geqslant 1$. On a alors (cf. [Pe2, Proposition 3.5.1]) :

Proposition 3.8.2. *Si Y est une hypersurface presque de Fano vérifiant l'hypothèse (G) telle que $\delta(Y) \geqslant 1$, $C_{\mathrm{eff}}(\bar{Y})$ est polyédrique rationnel et si $\delta(\omega_X^{-1} - 3L) > 0$ (où L est le diviseur de X associé à l'hypersurface Y), alors pour toute place archimédienne $\nu \in \mathrm{Val}(k)$, pour toute fonction ϕ complexe définie sur $\widehat{\mathcal{T}}_X(k_\nu)$, C^∞ à support compact on a la relation :*

$$\int_{\mathcal{T}_Y(k_\nu)} \phi(y)\omega_{\mathcal{T}_Y,\nu}(y) = \int_{k_\nu}\int_{\mathcal{T}_X(k_\nu)} \phi(y)e_\nu(\xi_\nu f(y))\omega_{\mathcal{T}_X,\nu}(y)d\xi_\nu,$$

où f est telle que $Y = \{y \in X \mid f(y) = 0\}$, et e_ν est le caractère $\xi \mapsto e^{2i\pi\Lambda_\nu(\xi)}$, avec $\Lambda_\nu(\xi) = \lfloor \mathrm{Tr}_{k_\nu/\mathbf{R}}(\xi)\rfloor$.

Nous allons appliquer cette proposition aux variétés X et Y considérées, avec $k = \mathbf{Q}$, $\nu = \infty$ et $f = F$. Si l'on montre que la proposition s'applique dans ce cadre, on aura alors pour tout fonction ϕ, C^∞ à support compact sur $\mathcal{T}_X(\mathbf{R})$:

$$\int_{\mathcal{T}_Y(\mathbf{R})} \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\omega_{\mathcal{T}_Y,\infty}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathcal{T}_X(\mathbf{R})} \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})e(\beta F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))\omega_{\mathcal{T}_X,\infty}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})d\beta.$$

Quitte à approximer l'indicatrice du domaine d'intégration $\Phi = \{|\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant 1$
$|\boldsymbol{z}| \leqslant 1\}$ par des fonctions $\phi \in C^\infty(\mathcal{T}_X(\mathbf{R})) = C^\infty(\mathbf{R}^{n+r})$, on obtient alors

$$\sigma_\infty(Y) = \int_\Phi \omega_{\mathcal{T}_Y,\infty}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\substack{|\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant 1\\ |\boldsymbol{z}|\leqslant 1}} e(\beta F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} d\beta = J.$$

Nous allons donc montrer que la proposition s'applique bien au cas qui nous intéresse.

Dans le cas présent nous avons :

$$C_{\text{eff}}(\bar{X}) = \mathbf{R}^+.[D_0] + \mathbf{R}^+.[D_{n+1}]$$

$$X^*(T_{NS}) = \mathbf{Z}.[D_0] + \mathbf{Z}.[D_{n+1}],$$

et

$$\mathbf{A}_{C_{\text{eff}}(\bar{X}),\mathbf{Q}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}[[D_0],[D_{n+1}]]]) \simeq \mathbf{A}^2_{\mathbf{Q}}.$$

Donc en particulier $\mathbf{A}_{C_{\text{eff}}(\bar{X}),\mathbf{Q}}$ est non singulière, donc vérifie bien (G). D'autre part, le diviseur anticanonique de Y est :

$$[\omega_Y^{-1}] = (n_1 - d_1)[\tilde{D}_0] + (n_2 - d_2)[\tilde{D}_{n+1}]$$

donc

$$\delta(\omega_Y^{-1}) = \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbf{N}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} \{x_1(n_1 - d_1) + x_2(n_2 - d_2)\} \geqslant 1.$$

Le diviseur L associé à Y est $d_1[D_0] + d_2[D_{n+1}]$ et donc :

$$\delta(\omega_X^{-1} - 3L) = \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbf{N}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} \{x_1(n_1 - 3d_1) + x_2(n_2 - 3d_2)\} = \inf_{j\in\{1,2\}} (n_j - 3d_j) \geqslant 1.$$

Par ailleurs,

$$C_{\text{eff}}(\bar{Y}) = \mathbf{R}^+.[\tilde{D}_0] + \mathbf{R}^+.[\tilde{D}_{n+1}]$$

qui est polyédrique rationnel. Les conditions de la proposition sont donc toutes bien vérifiées.

Nous allons à présent interpréter cette constante J en termes de mesures de Tamagawa. Plus précisément, en notant $\tau_\infty = \omega_\infty$, nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 3.8.3. *On a*

$$\tau_\infty = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4} \sigma_\infty.$$

Démonstration. Il nous suffit de montrer que par exemple pour l'ouvert V défini précédemment, on a $\tau_\infty(V) = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4}\sigma_\infty(V)$. Par définition de la mesure de Leray,

$$\sigma_\infty(V) = \int_{\substack{\pi^{-1}(V)\cap\{|\boldsymbol{x}|\leqslant 1\\ |\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|,\ |\boldsymbol{z}|\leqslant 1\}}} \frac{d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right|}.$$

On remarque que

$$\max_i |x_i| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ |x_0| \leqslant \left(\max_i \frac{|x_i|}{|x_0|}\right)^{-1}.$$

On applique alors les changements de variables $x_i = x_0u_i$, $y_j = z_{m+1}x_0v_j$ et $z_k = z_{m+1}w_k$ dans l'intégrale ci-dessus. On a alors que

$$\left\{\begin{array}{l} |\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant 1 \\ |\boldsymbol{z}| \leqslant 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x_0| \leqslant (|\boldsymbol{u}|)^{-1} \\ |z_{m+1}||\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}| \\ |z_{m+1}| \leqslant |\boldsymbol{w}|^{-1} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x_0|^{m+1-d_1} \leqslant h_\infty^{(1)}(\boldsymbol{u})^{-1} \\ |z_{m+1}|^{n-r+1-d_2} \leqslant h_\infty^{(2)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})^{-1} \end{array}\right.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\sigma_\infty(V) &= \int_V \frac{1}{\left|\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right|}\int_{\substack{|x_0|^{m+1-d_1}\leqslant h_\infty^{(1)}(\boldsymbol{u})^{-1}\\ |z_{m+1}|^{n-r+1}\leqslant h_\infty^{(2)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})^{-1}}} \\ &\qquad |x_0|^{m-d_1}|z_{m+1}|^{n-r-d_2}dx_0dz_{m+1}d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}d\hat{\boldsymbol{w}} \\ &= \frac{4}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}\int_{\rho(V)} \frac{d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}d\hat{\boldsymbol{w}}}{h_\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\left|\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right|} \\ &= \frac{4}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}\int_V \omega_\infty.\end{aligned}$$

□

3.8.2 Étude de la série singulière $\mathfrak{S}$

Rappelons que $\mathfrak{S}$ est définie par :

$$\mathfrak{S} = \sum_{d\in\mathbf{N}^*} \frac{\mu(d)}{d^{r+1}}\mathfrak{S}_d,$$

avec

$$\mathfrak{S}_d = \sum_{q=1}^{\infty} A_d(q)$$

où

$$A_d(q) = q^{-(n+2)} \sum_{a\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*}\ \sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{a}{q}F(d\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right).$$

Lemme 3.8.4. *Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, la fonction A_d est multiplicative.*

Démonstration. On considère deux entiers q_1, q_2 tels que $\mathrm{pgcd}(q_1, q_2) = 1$, et posons $q = q_1 q_2$. Montrons qu'alors $A_d(q) = A_d(q_1)A_d(q_2)$. On remarque que

$$A_d(q_1)A_d(q_2) = q^{-(n+2)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{\substack{(\boldsymbol{b}_1^{(1)}, \boldsymbol{b}_2^{(1)}, \boldsymbol{b}_3^{(1)}) \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^{n+2} \\ (\boldsymbol{b}_1^{(2)}, \boldsymbol{b}_2^{(2)}, \boldsymbol{b}_3^{(2)}) \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^{n+2}}} e\left(\frac{a_1 q_2 F(d\boldsymbol{b}_1^{(1)}, \boldsymbol{b}_2^{(1)}, \boldsymbol{b}_3^{(1)}) + a_2 q_1 F(d\boldsymbol{b}_1^{(2)}, \boldsymbol{b}_2^{(2)}, \boldsymbol{b}_3^{(2)})}{q}\right).$$

Or si l'on considère l'unique élément $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_i \equiv \boldsymbol{b}_i^{(1)} (q_1) \\ \boldsymbol{b}_i \equiv \boldsymbol{b}_i^{(2)} (q_2) \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} q_2 F(d\boldsymbol{b}_1^{(1)}, \boldsymbol{b}_2^{(1)}, \boldsymbol{b}_3^{(1)}) \equiv q_2 F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \ (q) \\ q_1 F(d\boldsymbol{b}_1^{(2)}, \boldsymbol{b}_2^{(2)}, \boldsymbol{b}_3^{(2)}) \equiv q_1 F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \ (q) \end{cases}$$

et ainsi :

$$A_d(q_1)A_d(q_2) = q^{-(n+2)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q} F(d\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)\right).$$

Or l'application :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^* & \to & (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^* \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 q_2 + a_2 q_1 \end{array}$$

est bijective. On obtient donc finalement :

$$A_d(q_1)A_d(q_2) = A_d(q).$$

□

Puisque $\mathfrak{S}_d$ est de plus absolument convergente (cf. lemme 3.3.21), on a :

$$\mathfrak{S}_d = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{d,p}$$

où

$$\sigma_{d,p} = \sum_{k=0}^{\infty} A_d(p^k).$$

On remarque par ailleurs que pour tous $d, k \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{a}{p^k}F(d\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)$$
$$= \sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{a}{p^k}F(p^{v_p(d)}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)$$

et donc :

$$A_d(p^k) = A_{p^{v_p(d)}}(p^k).$$

Par conséquent, pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\frac{\mu(d)}{d^{r+1}}\mathfrak{S}_d = \prod_{p\in\mathcal{P}} B_{p^{v_p(d)}}$$

où pour tout $\nu \in \mathbf{N}^*$:

$$B_{p^\nu} = \frac{\mu(p^\nu)}{p^{\nu(r+1)}}\sum_{k=0}^{\infty} A_{p^\nu}(p^k).$$

Remarquons que $B_{p^\nu} = 0$ pour tout $\nu \geqslant 2$. La série $\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{r+1}}\mathfrak{S}_d$ étant absolument convergente, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{d\in\mathbf{N}^*}\frac{\mu(d)}{d^{r+1}}\mathfrak{S}_d &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} B_{p^\nu}\right)\\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\sum_{\nu=0}^{1} B_{p^\nu}\right)\\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_1(p^k) - \frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}}\right)\right)}_{\sigma'_p}.\end{aligned}$$

Notons à présent

(3.160)
$$M_p(k) = \operatorname{Card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+2} \mid \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \equiv 0\ (p^k)\right\}$$

Lemme 3.8.5. *Pour tout entier $N > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{N}\left(A_1(p^k) - \frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}}\right) = \frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}},$$

et donc

$$\sigma'_p = \lim_{N\to\infty}\frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}}.$$

Démonstration. On pose $q = p^N$. Il est immédiat que

$$q^{-1}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{t}{q}F(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)$$
$$= \operatorname{Card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2} \mid F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv 0\ (q)\right\},$$

et de même

$$q^{-1}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} e\left(\frac{t}{q}F(p\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)$$
$$= p^{r+1}\operatorname{Card}\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2} \mid \boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}\ (p)\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv 0\ (q)\right\}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
M_p(N) &= q^{-1}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} \\
&\quad \left(e\left(\frac{t}{q}F(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)-\frac{1}{p^{r+1}}e\left(\frac{t}{q}F(p\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)\right) \\
&= q^{-1}\sum_{q_1\mid q}\sum_{\substack{0\leqslant a<q_1\\ \operatorname{pgcd}(a,q_1)=1}}\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+2}} \\
&\quad \left(e\left(\frac{a}{q_1}F(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)-\frac{1}{p^{r+1}}e\left(\frac{a}{q_1}F(p\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)\right) \\
&= p^{-N}\sum_{k=1}^{N}\frac{p^{N(n+2)}}{p^{k(n+2)}}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*}\sum_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+2}} \\
&\quad \left(e\left(\frac{a}{p^k}F(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)-\frac{1}{p^{r+1}}e\left(\frac{a}{p^k}F(p\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\right)\right) \\
&= p^{N(n+1)}\sum_{k=0}^{N}\left(A_1(p^k)-\frac{A_p(p^k)}{p^{r+1}}\right)
\end{aligned}$$

□

Nous allons à présent interpréter les constantes σ'_p en terme de mesures de Tamagawa τ_p définies par

$$\tau_p = \left(1-\frac{1}{p}\right)^2\omega_p.$$

Pour cela nous commençons par établir deux lemmes intermédiaires :

Lemme 3.8.6. *Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$W_p^*(N) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+2} \mid \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p),\\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \not\equiv \mathbf{0}\ (p), F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv 0\ (p^r)\}$$

ainsi que $M_p^*(N) = \operatorname{Card} W_p^*(N)$. *Il existe alors un entier N_0 tel que pour tout $N \geqslant N_0$:*

$$\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \\ \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p),\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \not\equiv \mathbf{0}\ (p) \\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p} = \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}}.$$

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$. Dans tout ce qui suit, on note

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]_N = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mod p^N.$$

On écrit alors :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2},\ \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \not\equiv \mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mod p^N \\ \boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p),\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \not\equiv \mathbf{0}\ (p) \\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \equiv 0\ (p^N)}} \int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{3.161}$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in W_p^*(N)} \int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}, \\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{3.162}$$

Puisque Y est lisse, il existe un $N > 0$ assez grand tel que, pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+2}$ tel que $\boldsymbol{x} \not\equiv \mathbf{0}\ (p)$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \not\equiv \mathbf{0}\ (p)$, et $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$:

$$c = \inf_{i,j,k} \left\{ v_p\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\right),\ v_p\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\right),\ v_p\left(\frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\right) \right\}$$

soit non nul et constant sur la classe définie par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. On peut supposer que $N > c$ et que $c = v_p\left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\right)$. On considère $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$ tel que $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, et $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}') \in \mathbf{Z}_p^{n+2}$ quelconque. On a alors

$$F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \sum_{i=0}^{r} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) u_i'$$
$$+ \sum_{j=r+1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_j}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) v_j' + \sum_{k=m+1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial z_k}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) w_k' + G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'),$$

où $G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}')$ est une somme de termes contenant au moins deux facteurs u_i', v_j' ou w_k'. Ainsi, on a donc, si $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}') \in (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+2}$:

$$F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') \equiv F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\ (p^{N+c}).$$

Par conséquent, l'image de $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ dans $\mathbf{Z}_p/p^{N+c}$ dépend uniquement de $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, on note alors $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ cette image.

Si $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq 0$, alors l'intégrale

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{n+2},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

est nulle, et l'ensemble

$$\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0\ (p^{N+c})\}$$

est vide.

Si $F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ alors, par le lemme de Hensel, les applications coordonnées $X_0,...,X_r,Y_{r+1},...,Y_m,Z_{m+1},...,Z_n$ définissent un difféomorphisme p-adique de

$$\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 0\}$$

sur

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{z}}) + (p^N\mathbf{Z}_p)^{n+1},$$

où $\hat{\boldsymbol{z}} = (z_{m+1},...,z_n)$. Par conséquent, on a :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathbf{Z}_p^{n+2},\\ [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$
$$= \int_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{z}})+(p^N\mathbf{Z}_p)^{n+1}} p^c du_{0,p}...du_{r,p}dv_{r+1,p}...dv_{m,p}dw_{m+1,p}...dw_{n,p} = p^{c-N(n+1)}.$$

On a d'autre part, puisque $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{N+c}$ ne dépend que de $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$:

$$p^{-(N+c)(n+1)}\operatorname{card}\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$
$$F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0(p^{N+c})\} = p^{-(N+c)(n+1)}p^{(n+1)c} = p^{c-N(n+1)}.$$

On a donc finalement :

$$\int_{\substack{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{n+2},\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}\ (p)\\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\}}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W_p^*(N)\\ F^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} p^{c-N(n+1)}$$
$$= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in W_p^*(N)} p^{-(N+c)(n+1)}\operatorname{card}\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]_N = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$
$$F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \equiv 0(p^{N+c})\} = \frac{M_p^*(N+c)}{p^{(N+c)(n+1)}}.$$

D'où le résultat.

□

Lemme 3.8.7. *On a*

$$\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{n+2}\\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\not\equiv\mathbf{0}\ (p)\\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p} = \left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{n+2}\\ \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p},$$

et d'autre part

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}} = \left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)\sigma_p'.$$

Démonstration. La première partie du lemme résulte du fait que :

$$\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},p\boldsymbol{z}) = p^{-(n-r+1-d_2)}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

Pour la deuxième partie, on considère un entier j tel que $N\geqslant jd_2+1$ et on considère l'ensemble

$$\begin{aligned}\tilde{N}(j) = \operatorname{Card}\{\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}_p/p^N\mathbf{Z}_p)^{r+1},\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(p^j\mathbf{Z}_p/p^N\mathbf{Z}_p)^{n-r+1} \mid \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\not\equiv\mathbf{0}\ (p^{j+1}), F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv 0\ (p^N)\}.\end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $N>jd_2$

$$\begin{aligned}\tilde{N}(j) = \operatorname{Card}\{\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^{r+1},\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(\mathbf{Z}/p^{N-j}\mathbf{Z})^{n-r+1} \mid \boldsymbol{x}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\not\equiv\mathbf{0}\ (p), F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv 0\ (p^{N-jd_2})\}\\ = p^{(r+1)jd_2+(n-r+1)(jd_2-j)}M^*(N-jd_2).\end{aligned}$$

Soit N_0 comme dans le lemme précédent, et soit $j_0=\lceil (N-N_0)/d_2\rceil$. On a alors

$$\begin{aligned}M_p(N) &= \sum_{0\leqslant jd_2\leqslant N-N_0}\tilde{N}(j)\\ &\quad + O\left(\operatorname{Card}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^{n+2} \mid (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\equiv\mathbf{0}\ (p^{j_0})\}\right)\\ &= \sum_{0\leqslant jd_2\leqslant N-N_0} p^{(r+1)jd_2+(n-r+1)(jd_2-j)}M_p^*(N-jd_2)+O\left(p^{N(n+2)-j_0(n-r+1)}\right).\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme précédent :

$$\frac{M_p^*(N-jd_2)}{p^{(N-jd_2)(n+1)}} = \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+1)}},$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned}M_p(N) &= \sum_{0\leqslant j\leqslant N-N_0} p^{-j(n-r+1)+jd_2}M_p^*(N)+O\left(p^{N(n+2)-j_0(n-r+1)}\right)\\ &= M_p^*(N)\frac{1-p^{-(N-N_0+1)(n-r+1-d_2)}}{1-p^{-(n-r+1-d_2)}}+O\left(p^{N(n+2)-j_0(n-r+1)}\right),\end{aligned}$$

et puisque $\sigma_p'=\lim_{N\to\infty}\frac{M_p(N)}{p^{N(n+1)}}$, on obtient le résultat.

□

On déduit des lemmes 3.8.6 et 3.8.7 que

$$\sigma'_p = \int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{n+2}\\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p}. \tag{3.163}$$

On conclut alors en utilisant le lemme ci-dessous :

Lemme 3.8.8. *On pose :*

$$a(p) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)^{-1}.$$

On a alors

$$\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbf{Z}_p^{n+2}\\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0}} \omega_{L,p} = \int_{\substack{Y_0(\mathbf{Q}_p)\cap\{|\boldsymbol{x}|_p=1\\ h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = a(p)\omega_p(Y(\mathbf{Q}_p)).$$

Démonstration. Il suffit de montrer pour tout ouvert V de $\mathbf{A}^{n-1}_{\mathbf{Q}_p}\subset X(\mathbf{Q}_p)$ tel que pour tout $P=\pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in V$ on a (par exemple) $x_0z_{m+1}\neq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\neq 0$ (les autres cas se traitant de façon analogue) l'égalité

$$\int_{\substack{\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(Y)\\ \cap\{|\boldsymbol{x}|_p=1,\ h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = a(p)\omega_p(V\cap Y)$$

est vérifiée. Remarquons dans un premier temps que, pour un tel ouvert V, on a

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\omega_p(V\cap Y) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{V\cap Y}\frac{du_{1,p}...du_{r,p}dv_{r+1,p}...dv_{m,p}dw_{m+2,p}...dw_{n,p}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\right|_p h_p^1(\boldsymbol{u})h_p^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}.$$

En appliquant deux fois le lemme 5.4.5 de [Pe1], on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2&\left(1-\frac{1}{p^{m+1-d_1}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)^{-1}\omega_p(V)\\ &= \int_{\substack{\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(Y)\\ \cap\{h_p^{(1)}(\boldsymbol{x})\leqslant 1,\ h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1\}}}\frac{d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}d\hat{\boldsymbol{z}}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\right|_p}\\ &= \int_{\substack{\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(Y)\\ \cap\{h_p^{(1)}(\boldsymbol{x})\leqslant 1,\ h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1\}}}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

Or, étant donné que

$$\omega_{L,p}(p\boldsymbol{x},p\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = p^{-(m+1-d_1)}\omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$

on a

$$\int_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(Y)\\ \cap\{h_p^{(1)}(\boldsymbol{x})\leqslant 1,\, h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1}} \omega_{L,p}$$
$$= \left(1-\frac{1}{p^{m+1-d_1}}\right)^{-1}\int_{\substack{X_0(\mathbf{Q}_p)\cap\pi^{-1}(Y)\\ \cap\{|\boldsymbol{x}|_p=1,\, h_p^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\leqslant 1\}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

et on obtient le résultat souhaité.

□

On déduit de ce lemme et de la formule (3.163) que

$$\left(1-\frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)\sigma'_p = \left(1-\frac{1}{p}\right)^2\omega_p(Y(\mathbf{Q}_p)) = \tau_p(Y(\mathbf{Q}_p)).$$

3.8.3 Conclusion

Rappelons que la formule asymptotique conjecturée par Peyre dans [Pe1], dans sa version corrigée par Batyrev et Tschinkel, pour le nombre $\mathcal{N}_U(B)$ de points de hauteur bornée par B sur l'ouvert U de Zariski de la variété Y (pour la hauteur associée au fibré anticanonique ω_Y^{-1}) est :

$$\alpha(Y)\beta(Y)\tau_H(Y)B\log(B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y))-1} \tag{3.164}$$

où

$$\alpha(Y) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y))-1)!}\int_{\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(Y)^\vee} e^{-\langle\omega_Y^{-1},y\rangle}dy,$$
$$\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(Y)^\vee = \{y\in\mathrm{Pic}(Y)\otimes\mathbf{R}^\vee \mid \forall x\in\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(Y), \langle x,y\rangle\geqslant 0\}$$

et

$$\beta(Y) = \mathrm{card}(H^1(\mathbf{Q},\mathrm{Pic}(\overline{Y}))),$$
$$\tau_H(Y) = \prod_{\nu\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})}\tau_\nu(Y(\mathbf{Q}_\nu))$$

(car ici il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin). Dans le cas présent on a

$$\mathrm{Pic}(Y) = \mathbf{Z}[\tilde{D}_0]\oplus\mathbf{Z}[\tilde{D}_{n+1}]\simeq\mathbf{Z}^2,\ \ \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y))=2,$$
$$-[K_Y] = (m+1-d_1)[\tilde{D}_0]+(n-r+1-d_2)[\tilde{D}_{n+1}],$$
$$\Lambda^1_{\mathrm{eff}}(Y) = \mathbf{R}^+[\tilde{D}_0]+\mathbf{R}^+[\tilde{D}_{n+1}]\simeq(\mathbf{R}^+)^2.$$

On a par conséquent :

$$\alpha(Y) = \int_{[0,+\infty[^2} e^{-(m+1-d_1)t_1-(n-r+1-d_2)t_2}dt_1dt_2 = \frac{1}{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}.$$

D'autre part $\mathrm{Pic}(\overline{Y}) \simeq \mathbf{Z}^2$, et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(\overline{Y})$, on a donc

$$\beta(Y) = 1.$$

Par ailleurs, d'après ce qui a été vu dans les sections précédentes, on a

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \tau_p(Y(\mathbf{Q}_p)) = \mathfrak{S} \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right)$$

et

$$\tau_\infty(Y(\mathbf{R})) = \frac{(m+1-d_1)(n-r+1-d_2)}{4} J.$$

Ainsi on a :

$$\alpha(Y)\beta(Y)\tau_H(Y)B\log(B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y))-1} = \frac{1}{4}\mathfrak{S}J \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{n-r+1-d_2}}\right) B\log(B),$$

et on retrouve bien la formule de la proposition 3.8.1. Nous avons donc démontré le théorème 3.1.1.

Chapitre 4

Cas général

4.1 Introduction

On considère une variété torique déployée complète lisse $X = X(\Delta)$ de dimension n définie par le réseau $N = \mathbf{Z}^n$ et un éventail Δ ayant $n+r$ arêtes engendrées par des vecteurs notés $v_1, v_2, ..., v_{n+r} \in \mathbf{R}^{n+r}$ (avec $r \geqslant 2$). Nous supposerons que le groupe de Picard et le cône effectif de X sont engendrés par les classes de diviseurs associés aux arêtes de r vecteurs générateurs de l'éventail, disons $v_{n+1}, ..., v_{n+r}$. On note $D_{n+1}, ..., D_{n+r}$ les diviseurs associés, et $[D_{n+1}], ..., [D_{n+r}]$ leurs classes dans $\mathrm{Pic}(X)$. On peut alors écrire

$$\mathrm{Pic}(X) = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbf{Z}[D_{n+j}],$$

$$C^1_{\mathrm{eff}}(X) = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{R}^+[D_{n+j}],$$

et la classe du diviseur anticanonique de X est de la forme

$$[-K_X] = \sum_{j=1}^{r} n_j [D_{n+j}]$$

avec $n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbf{Z}$. D'autre part, pour $d_1, ..., d_r \in \mathbf{N}$ fixés (tels que $n_j > d_j$ pour tout j) considérons un diviseur de classe $\sum_{j=1}^{r} d_j [D_{n+j}]$ et une hypersurface Y définie par une section de ce diviseur. On supposera que l'hypersurface choisie est lisse et de dimension supérieure ou égale à 3. La classe du diviseur anticanonique de Y est alors donnée par

$$[-K_Y] = \sum_{j=1}^{r} (n_j - d_j)[\tilde{D}_{n+j}],$$

où les $\tilde{D}_{n+j}$ désignent les diviseurs induits par les diviseurs D_{n+j} sur Y. En utilisant par exemple la construction décrite par Salberger dans [Sa, §10], on peut construire une hauteur H sur X associée à $\sum_{j=1}^{r}(n_j - d_j)[D_{n+j}]$. Elle induit une hauteur sur Y qui est une hauteur associée à $[-K_Y]$, et que l'on notera encore H. L'objectif est alors de donner une formule asymptotique pour le nombre

$$\mathcal{N}_V(B) = \mathrm{Card}\{P \in Y(\mathbf{Q}) \cap V \mid H(P) \leqslant B\},$$

pour un ouvert V bien choisi.

La variété torique X peut être définie comme le quotient de

$$X_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \forall \sigma \in \Delta_{\max}, \prod_{i \mid v_i \notin \sigma} x_i \neq 0\}$$

par l'action du tore $(\mathbf{C}^*)^r$ de la forme :

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_r) \in (\mathbf{C}^*)^r,\ \forall \boldsymbol{x} \in X_1,\ \boldsymbol{t}.\boldsymbol{x} = (\prod_{j=1}^{r} t_j^{a_{i,j}} x_i)_{i \in \{1,...,r\}},$$

où les $a_{i,j}$ ont été définis par la formule (3.2) (voir par exemple [Co, §2] pour plus de détails). Notons $\pi : X_1 \to X$ la projection canonique. L'hypersurface Y de X est alors $\pi(Y_1)$ où Y_1 est l'hypersurface de X_1 donnée par une équation $F(\boldsymbol{x}) = 0$, où F est un polynôme vérifiant

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_r) \in (\mathbf{C}^*)^r,\ \forall \boldsymbol{x} \in X_1,\ F(\boldsymbol{t}.\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{j=1}^{r} t_j^{d_j}\right) F(\boldsymbol{x}).$$

Pour tous $m \in \{1, ..., r\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_r$, on note

$$\mathcal{C}_{m,\tau} = \{(j,k) \mid j \in \{\tau(1), ..., \tau(m)\}, k \in \{1, ..., d_j\}\}$$

$$\mathcal{D}_{m,\tau} = \mathbf{N}^{\mathcal{C}_{m,\tau}},$$

$$\forall (j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau},\ \ J(j,k) = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid a_{i,j} = k\}.$$

Le polynôme F peut être décomposé sous la forme :

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{d} = (d_{j,k})_{(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}} \in \mathcal{D}_{m,\tau}} F_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}),$$

où $F_{\boldsymbol{d}}$ est un polynôme homogène de degré $d_{j,k}$ en les variables $(x_i)_{i \in J(j,k)}$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}$. On pose alors pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}_{m,\tau}$, et tout $(j,k) \in \mathcal{C}_{m,\tau}$,

$$V^*_{\tau,m,\boldsymbol{d},(j,k)} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r} \mid \forall i \in J(j,k),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{d}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\right\}.$$

Posons enfin

$$n(F) = n + r - \max_{\substack{m\in\{1,...,r\}\\ \tau\in\mathfrak{S}_r}} \min_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{D}^*_{m,\tau}} \max_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}} \dim V^*_{\tau,m,\boldsymbol{d},(j,k)},$$

où $\mathcal{D}^*_{m,\tau} = \{\boldsymbol{d} = (d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}} \in \mathbf{N}^{\mathcal{C}_{m,\tau}} \mid F_{\boldsymbol{d}} \neq 0\}$. On pose par ailleurs $I_1, ..., I_N$ les ensembles I minimaux pour l'inclusion tels que

$$\forall \sigma \in \Delta,\ \sum_{i\in I} \mathbf{R}^+ v_i \nsubseteq \sigma.$$

Nous démontrons alors dans cette partie le théorème ci-dessous :

Théorème 4.1.1. *Si l'on suppose que Δ est tel que, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, $\operatorname{Card} I_k \geqslant 6$, qu'une puissance de ω_Y^{-1} est engendrée par ses sections globales et que*

$$n(F) \geqslant r(6.2^{\sum_{j=1}^r d_j} + 4)\left(\prod_{j=1}^r (3 + 10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^r d_j\right),$$

alors il existe un ouvert V de X de la forme $\pi(U)$ où U est un ouvert de X_1 tel que :

$$\mathcal{N}_V(B) = CB(\log B)^{r-1} + O(B(\log B)^{r-2}),$$

où C est la constante conjecturée par Peyre.

Remarque 4.1.2. *L'ouvert U est définit par la formule* (4.98). *Nous verrons en particulier que cet ouvert de X_1 vérifie*

$$\boldsymbol{x} \in U \Rightarrow \forall \boldsymbol{t} \in (\mathbf{C}^*)^r,\ \boldsymbol{t}.\boldsymbol{x} \in U.$$

On a donc en particulier $\pi^{-1}(V) = U$.

Dans la section 2 nous fixons précisément le cadre de notre étude. Nous y décrivons entre autres les variétés toriques auxquelles nous nous intéressons, l'expression de la hauteur, et la forme des équations définissant les hypersurfaces. Nous montrons par ailleurs que le calcul de $\mathcal{N}_U(B)$ peut se ramener à celui de

$$N_{\boldsymbol{e},U}(B) = \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \cap U \mid \forall i \in \{1, ..., n+r\}\ e_i | x_i,$$
$$\left. F(\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall i \in \{1, ..., n+r\}\ |x_i| \leqslant \prod_{j=1}^r |M_j(\boldsymbol{x})|^{a_{i,j}},\ \prod_{j=1}^r |M_j(\boldsymbol{x})|^{n_j - d_j} \leqslant B \right\}.$$

pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$ fixé, et où $F, M_1, ..., M_r$ sont des monômes et les $a_{i,j}, n_j, d_j$ des entiers que nous préciserons. La méthode utilisée pour évaluer les $N_{\boldsymbol{e},U}(B)$ est inspirée de celle développée par Schindler dans [Sch2] pour traiter le cas des hypersurfaces des espaces biprojectifs. Cette méthode consiste dans un premier temps à donner une formule asymptotique pour le nombre $N_{\boldsymbol{e},U}(P_1,...,P_r)$ de points $\boldsymbol{x}$ de $U\cap \mathbf{Z}^{n+r}$ tels que $|M_j(\boldsymbol{x})| \leqslant P_j$ pour tout $j \in \{1,...,n+r\}$ pour des bornes $P_1,P_2,...,P_r$ fixées. Dans la section 3, en utilisant des arguments issus de la méthode du cercle, on établit une formule asymptotique pour $N_{\boldsymbol{e},U}(P_1,...,P_r)$ lorsque $P_1,...,P_r$ sont « relativement proches » en un sens que nous préciserons. Dans la section 4, pour tout sous-ensemble $J\subset\{1,...,r\}$ on donne, en utilisant à nouveau la méthode du cercle, une formule asymptotique pour $N_{\boldsymbol{e},U}(P_1,...,P_r)$ lorsque les $(P_j)_{j\notin J}$ sont « petits » et les $(P_j)_{j\in J}$ sont « grands » et « relativement proches ». Les résultats obtenus combinés avec ceux de la section 2 nous permettrons dans la section 5 d'établir une formule asymptotique pour $N_{d,U}(P_1,...,P_r)$ avec $P_1,P_2,...,P_r$ quelconques. Dans la section 6, nous utilisons une généralisation des résultats établis par Blomer et Brüdern dans [B-B] pour conclure quant à la valeur de $N_{\boldsymbol{e},U}(B)$ à partir des estimations obtenues dans les sections précédentes. Enfin, dans la section 7, on conclut en démontrant le théorème 4.1.1.

4.2 Préliminaires

À partir d'ici, pour les généralités sur les variétés toriques et sur la construction de la hauteur sur l'hypersurface Y nous renvoyons le lecteur aux sections 3.2.1 et 3.2.2. Nous adopterons en particulier les notations de ces sections dans tout ce qui va suivre.

Dans le cas présent, $\tilde{X}_0(\mathbf{Z})\subset \mathbf{Z}^{n+r}$ peut être décrit comme l'ensemble des $(n+r)$-uplets d'entiers notés $\boldsymbol{x}$, tels que (cf. [Sa, 11.5]) :

$$\exists \sigma\in\Delta_{\max} \mid \ \boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}\neq 0, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}})=1, \tag{4.2}$$

où

$$\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}=\prod_{i\notin\sigma(1)} x_i. \tag{4.3}$$

Nous allons à présent exprimer la hauteur H_0 de façon plus explicite. Rappelons avant tout que, d'après (3.2), nous avons pour tout $i\in\{1,...,n+r\}$,

$$[D_i]=\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}[D_{n+j}]$$

avec $a_{i,j} \in \mathbf{N}$ pour tous i, j. On a alors

$$[K_X^{-1}] = \sum_{i=1}^{n+r}[D_i] = \sum_{j=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,j}\right)}_{n_j}[D_{n+j}].$$

On remarque par ailleurs que l'action du tore de Néron-Severi T_{NS} sur les points $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\{1,\dots,n+r\}}$ du torseur universel X_0 est donnée par :

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_r) \in T_{\mathrm{NS}},\ \boldsymbol{t}.\boldsymbol{x} = \left(\left(\prod_{j=1}^{r} t_j^{a_{i,j}}\right) x_i\right)_{i\in\{1,\dots,n+r\}}.$$

Autrement dit, la variable x_i a pour poids $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,r})$. Considérons à présent une hypersurface Y de X donnée par une section globale s de $\mathcal{O}(D)$ où $D = \sum_{j=1}^{r} d_j[D_{n+j}]$. Une telle section s se relève en une unique fonction polynomiale $F : \tilde{X}_0 \to \mathbf{R}$ à coefficients rationnels vérifiant, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Q}^{n+r}$:

$$\forall \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_r) \in T_{\mathrm{NS}}, F(\boldsymbol{t}.\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{j=1}^{r} t_j^{d_j}\right) F(\boldsymbol{x}).$$

On a par ailleurs la proposition ci-dessous

Proposition 4.2.1. *Si V est une intersection complète lisse dans une variété torique complète et lisse, et si de plus la restriction de* $\mathrm{Pic}(X)$ *à* $\mathrm{Pic}(V)$ *est un isomorphisme, alors le torseur universel au dessus de V est obtenu en prenant l'inverse de V dans le torseur universel au-dessus de X.*

Démonstration. Voir [Pe2, Remarque 2.1.2 et Exemple 2.1.16] □

En particulier, dans le cas présent, d'après le théorème de Lefschetz, l'hypersurface de $\tilde{X}_0$ définie par l'annulation de la fonction F correspond alors au torseur universel au-dessus de Y. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.2.12, les $\mathbf{Q}$-points de Y correspondent, modulo l'action des points de torsion de T_{NS}, aux $\mathbf{Z}$-points $\boldsymbol{x}$ de $\tilde{X}_0$ tels que $F(\boldsymbol{x}) = 0$.

Remarque 4.2.2. *Dans tout ce qui va suivre on supposera que l'hypersurface Y définie par $F(\boldsymbol{x}) = 0$ est lisse. En fait cette propriété est vraie pour un ouvert dense de Zariski de coefficients $(\alpha_u)_{u\in P_D\cap\mathbf{Z}^n}$.*

Rappelons que l'on souhaite évaluer

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{0,V}(B) &= \mathrm{Card}\{P_0 \in \tilde{Y}_0(\mathbf{Z}) \cap T_0(\mathbf{Q}) \cap \pi^{-1}(V) \mid H_0(P_0) \leqslant B\} \\ &= \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+r} \cap \pi^{-1}(V) \mid \forall i \in \{1, \dots, n+r\}\ x_i \neq 0, \\ &\qquad F(\boldsymbol{x}) = 0,\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}) = 1,\ H_0(\boldsymbol{x}) \leqslant B\}\end{aligned}$$

pour un certain ouvert V. Quitte à appliquer une inversion de Möbius appropriée (cf. [Sa, §11] et section 4.7.1), on se ramène à évaluer, pour $\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_{n+r}) \in \mathbf{N}^{n+r}$ de :

$$N_{\boldsymbol{e},U}(B) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \cap U \mid \forall i \in \{1, ..., n+r\}\ e_i | x_i, \\ F(\boldsymbol{x}) = 0,\ H_0(\boldsymbol{x}) \leqslant B\},$$

(où $U = \pi^{-1}(V)$ est l'ouvert de X_1 cité dans la remarque 4.1.2) ce qui revient encore à estimer pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$ (cf. [Sa, §9, 11]) :

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \cap U \cap C_{0,\sigma}(\mathbf{R}) \mid \forall i \in \{1, ..., n+r\}\ e_i | x_i, \\ F(\boldsymbol{x}) = 0,\ H_0(\boldsymbol{x}) \leqslant B\},$$

où $C_{0,\sigma}(\mathbf{R}) = \pi^{-1}(C_{\sigma,\infty}(\mathbf{R}))$.

Considérons un cône maximal $\sigma \in \Delta_{\max}$ engendré par des éléments $(v_i)_{i \notin \{i_1,...,i_r\}}$ (qui forment alors une base de $\mathbf{Z}^n$ puisque Δ est supposé lisse et complet) pour $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n+r\}$ fixés. Par ailleurs, pour tout $i \in \{1, ..., n+r\} \setminus \{i_1, ..., i_r\}$, on note u_i l'unique vecteur tel que $\langle u_i, v_k \rangle = \delta_{i,k}$ pour tout $k \notin \{i_1, ..., i_r\}$, et on prend d'autre part $u_i = \mathbf{0}$ pour tout $i \in \{i_1, ..., i_r\}$. On pose alors pour tout i :

$$E(i) = D_i - \sum_{k=1}^{n+r} \langle u_i, v_k \rangle D_k.$$

On a en particulier $E(i_j) = D_{i_j}$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$.

Remarque 4.2.3. *Définissons la matrice $(\beta_{n+j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant r} \in \mathcal{M}_r(\mathbf{Z})$ comme la matrice inverse de $(a_{i_l,j})_{1 \leqslant l,j \leqslant r}$. On remarque alors que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$,*

$$E(n+j) = \sum_{k=1}^{r} \beta_{n+j,k} D_{i_k}.$$

Remarque 4.2.4. *Si $(e_1, ..., e_{n+r})$ désigne la base duale de $(D_1, ..., D_{n+r})$ (vue comme une base de $\mathrm{Div}_T(X)$), les diviseurs $E(i)$ sont caractérisés par $[E(i)] = [D_i]$ et $\langle E(i), e_k \rangle = 0$ pour tout $k \in \sigma(1)$.*

On a alors que (par la description de $C_{\sigma,\infty}$ donnée par la proposition 3.2.4) :

$$C_{0,\sigma}(\mathbf{R}) = \pi^{-1}(C_{\sigma,\infty}(\mathbf{R})) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n+r} \mid \forall i \in \{1, ..., n+r\},\ |x_i| \leqslant \left| \boldsymbol{x}^{E(i)} \right| \right\}.$$

On observe d'autre part que, pour tout $\boldsymbol{x} \in C_{0,\sigma}(\mathbf{R})$,

$$\max_{\tau \in \Delta_{\max}} |\boldsymbol{x}^{D(\tau)}| = |\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}|.$$

Par conséquent :

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) = \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \cap U \mid \forall i \in \{1,...,n+r\}\ e_i | x_i,\\ |x_i| \leqslant \left|\boldsymbol{x}^{E(i)}\right|,\ F(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ et } \left|\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}\right| \leqslant B\Big\}.$$

Remarquons que, $D(\sigma)$ étant caractérisé par $[D(\sigma)] = \sum_{j=1}^{r}(n_j - d_j)[D_{n+j}]$ et $\langle D(\sigma), e_k\rangle = 0$ pour tout $k \in \sigma(1)$, on a, d'après la remarque 4.2.4 :

$$D(\sigma) = \sum_{j=1}^{r}(n_j - d_j)E(n+j).$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{x}^{D(\sigma)} = \prod_{j=1}^{r}\left(\boldsymbol{x}^{E(n+j)}\right)^{n_j - d_j}.$$

On remarque par ailleurs que, toujours d'après la remarque 4.2.4 :

$$\forall i \in \{1,...,n+r\},\ E(i) = \sum_{j=1}^{r} a_{i,j}E(n+j).$$

On a donc

$$\boldsymbol{x}^{E(i)} = \prod_{j=1}^{r}\left(\boldsymbol{x}^{E(n+j)}\right)^{a_{i,j}}.$$

Ainsi,

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) = \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \cap U \mid \forall i \in \{1,...,n+r\}\ e_i | x_i,\\ |x_i| \leqslant \prod_{j=1}^{r}\left|\boldsymbol{x}^{E(n+j)}\right|^{a_{i,j}},\ F(\boldsymbol{x}) = 0,\ \prod_{j=1}^{r}\left|\boldsymbol{x}^{E(n+j)}\right|^{n_j - d_j} \leqslant B\Bigg\},$$

que nous pouvons encore récrire :

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) = \Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \mid \boldsymbol{e}.\boldsymbol{x} \in U,\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,\\ \forall i \in \{1,...,n+r\},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}\left|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}\right|^{a_{i,j}},\ \prod_{j=1}^{r}\left|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}\right|^{n_j - d_j} \leqslant B\Bigg\},$$

où l'on a posé $\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x} = (e_1x_1, ..., e_{n+r}x_{n+r})$. Cette récriture de $N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B)$ en termes de $(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}$ s'avèrera cruciale pour ce qui va suivre.

Posons à présent pour tout $(k_1, ..., k_r) \in \mathbf{N}^r$

$$\underline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1, ..., k_r) = \operatorname{Card}\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \mid \boldsymbol{e}.\boldsymbol{x} \in U,\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,\\ \forall j \in \{1,...,r\},\ \left\lfloor\left|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}\right|\right\rfloor + 1 = k_j,\ \forall i \in \{1,...,n+r\},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} k_j^{a_{i,j}}\Bigg\},$$

et

$$\overline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1,...,k_r) = \mathrm{Card}\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \mid \boldsymbol{e}.\boldsymbol{x} \in U,\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,$$
$$\forall j \in \{1,...,r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor = k_j,\ \forall i \in \{1,...,n+r\},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\Bigg\},$$

(on peut observer que $\overline{h}_{\boldsymbol{e},U}(\boldsymbol{k}) = \underline{h}_{\boldsymbol{e},U}(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$) et on remarque alors que :

$$\sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B} \underline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1,...,k_r) \leqslant N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) \leqslant \sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B} \overline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1,...,k_r).$$

En appliquant un analogue du résultat de Blomer et Brüdern sur les sommation hyperboliques (cf. [B-B]), nous allons montrer qu'il existe une constante $C_{\sigma,\boldsymbol{e}}$ et des réels $\beta_1,...,\beta_{n+r}$ tels que

$$\sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B} \underline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1,...,k_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}}B\log(B)^{r-1} + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i^{\beta_i}\right)B\log(B)^{r-2}\right),$$

$$\sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B} \overline{h}_{\boldsymbol{e},U}(k_1,...,k_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}}B\log(B)^{r-1} + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i^{\beta_i}\right)B\log(B)^{r-2}\right),$$

et nous en déduirons donc que

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}}B\log(B)^{r-1} + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i^{\beta_i}\right)B\log(B)^{r-2}\right).$$

Pour cela, il est nécessaire de calculer, pour tout $J \subset \{1,...,r\}$, pour $(t_j)_{j\in\{1,...,r\}\setminus J} \in \mathbf{N}^{r-\mathrm{Card}\,J}$ et pour $(k_j)_{j\in J}$ fixés, une formule asymptotique de la somme

$$\sum_{\forall j\notin J,\ k_j\leqslant t_j} h_{\boldsymbol{e}}(k_1,...,k_r).$$

Nous allons commencer par traiter, dans la section suivante, le cas où $J=\emptyset$ avec des bornes $t_1,...,t_r$ « relativement proches ».

4.3 Première étape

4.3.1 Préliminaires

En préliminaire aux inégalités de Weyl dans ce cadre plus général, nous construisons, dans cette section, des opérateurs algébriques que nous appliquerons au polynôme F.

À chaque entier $i \in \{1, ..., n+r\}$, nous associons un poids $\boldsymbol{a}_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,r}) \in \mathbf{N}^r$ ainsi qu'un ensemble fini E_i. Posons

$$\mathcal{C} = \{(j,k) \mid j \in \{1, ..., r\},\ k \neq 0,\ \exists i \in \{1, ..., n+r\},\ a_{i,j} = k\},$$

et fixons un ensemble de degrés $(t_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}} \in \mathbf{N}^{\mathcal{C}}$. Posons alors

$$I_0 = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid \forall j \in \{1, ..., r\},\ t_{j,a_{i,j}} \neq 0 \,\text{ou}\, a_{i,j} = 0\},$$

$$\mathcal{C}_0 = \{(j,k) \mid j \in \{1, ..., r\},\ k \neq 0,\ \exists i \in I_0,\ a_{i,j} = k\} \subset \mathcal{C},$$

$$\boldsymbol{t} = (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_0},$$

$$\forall (j,k) \in \mathcal{C}_0,\ J(j,k) = \{i \in I_0 \mid a_{i,j} = k\}.$$

On considère alors un ensemble de variables $\mathbf{X} = (x_i^{(l)})_{(i,l)\in\mathcal{E}}$, où $\mathcal{E} = \{(i,l) \mid i \in I_0,\ l \in E_i\}$. Pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_0$, notons

$$\mathcal{E}(j,k) = \{(i,l) \in \mathcal{E} \mid i \in J(j,k)\} = \{(i,l) \in \mathcal{E} \mid a_{i,j} = k\}.$$

Considérons un polynôme $\mathcal{F} \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$. Pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_0$, on définit l'opérateur $\Delta_{(j,k)}^{(t_{j,k})}$ par :

$$\begin{aligned}
\Delta_{(j,k)}^{(t_{j,k})}\mathcal{F}&\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j,k)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)\\ h\in\{1,\ldots,t_{j,k}\}}}\right)\\
&= \mathcal{F}_{t_{j,k}+1}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j,k)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)\\ h\in\{1,\ldots,t_{j,k}+1\}}}\right)\\
&\qquad - \mathcal{F}_{t_{j,k}}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j,k)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)\\ h\in\{1,\ldots,t_{j,k}\}}}\right),
\end{aligned}$$

où, pour tout $t \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t&\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j,k)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)\\ h\in\{1,\ldots,t\}}}\right)\\
&= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)\in\{0,1\}^t} (-1)^{\sum_{h=1}^t \varepsilon_h}\mathcal{F}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j,k)}, (\sum_{h=1}^{t}\varepsilon_h x_i^{(l,h)})_{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)}\right).
\end{aligned}$$

Remarque 4.3.1. *Pour un j fixé, les opérateurs $\Delta_{(j,k)}^{(t_{j,k})}$ commutent deux à deux.*

Proposition 4.3.2. *Considérons un ensemble d'entiers naturels $\boldsymbol{d} = (d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_0} \in \mathbf{N}^{\mathcal{C}_0}$ et un polynôme $\mathcal{G}_{\boldsymbol{d}}((x_i^{(l)})_{(i,l)\in\mathcal{E}})$ homogène de degré $d_{j,k}$ en les variables $(x_i^{(l)})_{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)}$. Alors pour tout $(j_0,k_0) \in \mathcal{C}_0$ on a :*

1. *Si* $d_{j_0,k_0} < t_{j_0,k_0}$*, alors* $\Delta_{(j_0,k_0)}^{(t_{j_0,k_0})}\mathcal{G}_{\boldsymbol{d}} = 0$*,*
2. *Si* $d_{j_0,k_0} = t_{j_0,k_0}$*, alors*

$$\Delta_{(j_0,k_0)}^{(t_{j_0,k_0})}\mathcal{G}_{\boldsymbol{d}}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j_0,k_0)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j_0,k_0)\\ h\in\{1,\dots,t_{j_0,k_0}\}}}\right) = -\mathcal{G}_{\boldsymbol{d},t_{j_0,k_0}}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j_0,k_0)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j_0,k_0)\\ h\in\{1,\dots,t_{j_0,k_0}\}}}\right)$$

et est linéaire en chaque $(x_i^{(l,h)})_{(i,l)\in\mathcal{E}(j_0,k_0)}$ *pour tout* $h \in \{1,\dots,t_{j_0,k_0}\}$ *si* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{t}$*.*

De plus, quel que soit $\boldsymbol{d}$*,* $\Delta_{(j_0,k_0)}^{(t_{j_0,k_0})}\mathcal{G}_{\boldsymbol{d}}\left((x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j_0,k_0)}, (x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j_0,k_0)\\ h\in\{1,\dots,t_{j_0,k_0}\}}}\right)$ *est homogène de degré* $d_{j,k}$ *en les variables* $(x_i^{(l)})_{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)}$ *pour tout* $(j,k) \neq (j_0,k_0)$ *et homogène de degré* d_{j_0,k_0} *en les variables* $(x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j_0,k_0)\\ h\in\{1,\dots,t_{j_0,k_0}\}}}$*.*

Démonstration. Ces résultats découlent de [Schm, Lemme 11.2] (les résultats de Schmidt, s'appliquant à n'importe quel anneau, y compris $\mathbf{Z}[(x_i^{(l)})_{(i,l)\notin\mathcal{E}(j_0,k_0)})$. □

On définit alors :

$$\Delta_j^{\boldsymbol{t}_j} = \Delta_{(j,k_1)}^{(t_{j,k_1})} \circ \dots \circ \Delta_{(j,k_{m_j})}^{(t_{j,k_{m_j}})}$$

où $\{k_1,\dots,k_{m_j}\} = \{k \in \mathbf{N}\setminus\{0\} \mid \exists i \in I_0 \mid a_{i,j} = k\}$. Par définition on a

$$\Delta_j^{\boldsymbol{t}_j}\mathcal{F}\left((x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}\\ h\in\{1,\dots,t_{j,a_{i,j}}\}}}\right) = (-1)^{\operatorname{Card}\mathcal{P}(j)}\sum_{(\varepsilon_k)_{k\in\mathcal{P}(j)}\in\{0,1\}^{\mathcal{P}(j)}}(-1)^{\sum_{k\in\mathcal{P}(j)}\varepsilon_k}\mathcal{F}_{(t_{j,k}+\varepsilon_k)_{k\in\mathcal{P}(j)}}\left((x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}\\ h\in\{1,\dots,t_{j,a_{i,j}}+\varepsilon_{a_{i,j}}\}}}\right),$$

où

$$\mathcal{P}(j) = \{k \in \mathbf{N}\setminus\{0\} \mid \exists i \in I_0 \mid a_{i,j} = k\},$$

et pour tout $(b_k)_{k\in\mathcal{P}(j)} \in \mathbf{N}^{\mathcal{P}(j)}$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{(b_k)_{k\in\mathcal{P}(j)}}\left((x_i^{(l,h)})_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}\\ h\in\{1,\dots,b_{a_{i,j}}\}}}\right)\\
&\qquad= \sum_{(\varepsilon_{k,1},\dots,\varepsilon_{k,b_k})_{k\in\mathcal{P}(j)}\in\{0,1\}^{\sum_{k\in\mathcal{P}(j)} b_k}} (-1)^{\sum_{\substack{k\in\mathcal{P}(j)\\ h\in\{1,\dots,b_k\}}}\varepsilon_{k,h}}\\
&\qquad\qquad\qquad\mathcal{F}\left(\left(\left(\sum_{h=1}^{b_k}\varepsilon_{k,h}x_i^{(l,h)}\right)_{\substack{(i,l)\in\mathcal{E}(j,k)\\ h\in\{1,\dots,b_k\}}}\right)_{k\in\mathcal{P}(j)}\right).
\end{aligned}$$

Remarque 4.3.3. *Les opérateurs $\Delta^{\boldsymbol{t}_j}$ commutent deux à deux.*

On peut alors définir l'opérateur :

$$\Delta^{\boldsymbol{t}} = \Delta^{\boldsymbol{t}_1} \circ \Delta^{\boldsymbol{t}_2} \circ \dots \circ \Delta^{\boldsymbol{t}_r}.$$

Considérons alors un ensemble de variables $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n+r})$. Tout polynôme $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$ peut être décomposé de façon unique sous la forme :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_0}\in\mathbf{N}^{\mathcal{C}_0}} \mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}),$$

où $\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x})$ est un polynôme homogène de degré $d_{j,k}$ en les variables $(x_i)_{i\in J(j,k)}$ pour tout $(j,k)\in\mathcal{C}_0$. Introduisons à présent les notations suivantes :

Notations 4.3.4.
1. $\boldsymbol{x}_0 = (x_i)_{i\notin I_0}$,
2. $\tilde{L} = \{(i,\boldsymbol{l}) \mid i \in I_0,\ \boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_r) \in \prod_{j=1}^r\{1,\dots,t_{j,a_{i,j}}+1\}\}$,
3. $L = \{(i,\boldsymbol{l}) \mid i \in I_0,\ \boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_r) \in \prod_{j=1}^r\{1,\dots,t_{j,a_{i,j}}\}\}$,
4. $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_0,\ L(j,k) = \{(i,\boldsymbol{l}) \in L \mid i \in J(j,k)\}$,
5. $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_0,\ \widehat{L}(j,k) = \{(i,\boldsymbol{l}) \in L(j,k) \mid l_j \neq t_{j,k}\}$,
6. $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_0,\ E(j,k) = L(j,k)\setminus\widehat{L}(j,k) = \{(i,\boldsymbol{l}) \in L(j,k) \mid l_j = t_{j,k}\}$,
7. $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_0,\ \forall h\in\{1,\dots,t_{j,k}\},\ L(j,k,h) = \{(i,\boldsymbol{l}) \in L(j,k) \mid l_j = h\}$,
8. $\widetilde{\mathbf{X}} = (x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}}$,
9. $\mathbf{X} = (x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L}$,
10. $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_0,\ \widehat{\mathbf{X}}_{(j,k)} = (x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\widehat{L}(j,k)}$.

Avec ces notations et d'après la proposition 4.3.2, nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 4.3.5. *Pour tout ensemble de degrés* $\boldsymbol{d} = (d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_0} \in \mathbf{N}^{\mathcal{C}_0}$, *le polynôme* $\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}})$ *vaut :*

1. 0 *s'il existe* $(j,k) \in \mathcal{C}_0$ *tel que* $d_{j,k} < t_{j,k}$,
2. *un polynôme* $\Gamma(\mathbf{X})$ *en* $\mathbf{X}$ *de degré* $d_{j,k}$ *en* $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k)}$, *et linéaire en chaque* $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k,h)}$ *pour tout* $(j,k) \in \mathcal{C}_0$ *et* $h \in \{1, ..., t_{j,k}\}$ *si* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{t}$.

Corollaire 4.3.6. *Pour tout polynôme* $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$, *on a*

$$\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}) + \sum_{\boldsymbol{d}>\boldsymbol{t}} \Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}}),$$

où $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{t}$ *signifie que* $d_{j,k} \geqslant t_{j,k}$ *pour tout* $(j,k) \in \mathcal{C}_0$ *et* $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{t}$.

Introduisons la définition suivante :

Définition 4.3.7. *Un polynôme* $F \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{x}]$ *sera dit* quasi-r-homogène *de* r*-degré* $(d_1, ..., d_r) \in \mathbf{N}^r$ *si*

$$\forall \boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_r) \in \mathbf{C}^r, \;\; F(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{x}) = (\prod_{j=1}^{r} s_j^{d_j})F(\boldsymbol{x}),$$

où $\boldsymbol{s}.\boldsymbol{x} = \left((\prod_{j=1}^r s_j^{a_{i,j}})x_i\right)_{i\in\{1,...,n+r\}}$.

Proposition 4.3.8. *Si* $\mathcal{F}$ *est un polynôme quasi-*r*-homogène de* r*-degré* $(d_1, ..., d_r)$ *et si l'ensemble de degrés* $(t_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}}$ *est tel que*

$$\forall j \in \{1, ..., r\}, \; \sum_{k\geqslant 1} k t_{j,k} = d_j,$$

alors,

$$\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}).$$

Démonstration. D'après le corollaire 4.3.6,

$$\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}) + \sum_{\boldsymbol{d}>\boldsymbol{t}} \Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}_0, \widetilde{\mathbf{X}}).$$

Par définition, pour tout $\boldsymbol{d}$, $\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}$ est quasi-r-homogène de r-degré $(\sum_{k\geqslant 1} k d_{j,k})_{j\in\{1,...,r\}}$. Or ce polynôme est également quasi-r-homogène de r-degré $(d_1, ..., d_r)$ (car $\mathcal{F}$ l'est). Le polynôme $\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}$ est donc nul si la condition

$$\forall j \in \{1, ..., r\}, \; \sum_{k\geqslant 0} k d_{j,k} = d_j$$

n'est pas vérifiée. Si $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{t}$, on a alors que $d_{j,k} \geqslant t_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_0$ et il existe (j_0, k_0) tel que $d_{j_0,k_0} > t_{j_0,k_0}$. On a alors

$$\sum_{k\in\mathcal{P}(j_0)} k d_{j_0,k} > \sum_{k\in\mathcal{P}(j_0)} k t_{j_0,k} = d_{j_0}.$$

Par conséquent, si $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{t}$, alors $\mathcal{F}_{\boldsymbol{d}} = 0$ et la proposition est démontrée. $\square$

4.3.2 Une inégalité de Weyl :

Plutôt que de considérer directement la fonction $\overline{h}_{\boldsymbol{e},V}$, posons

$$\overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1,...,k_r) = \mathrm{Card}\Big\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})=0,$$
$$\forall j\in\{1,...,r\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor=k_j,\ \forall i\in\{1,...,n+r\},\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\Bigg\}$$

et cherchons à obtenir une formule asymptotique pour

$$\begin{aligned}N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) &= \sum_{\forall j\notin J,\ k_j\leqslant P_j}\overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1,...,k_r)\\ &= \mathrm{Card}\Bigg\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})=0,\ \forall j\in\{1,...,r\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor\leqslant P_j,\\ &\qquad \forall i\in\{1,...,n+r\},\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}\left(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1\right)^{a_{i,j}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

en utilisant la méthode du cercle (la restriction à l'ouvert $\pi^{-1}(V)$ se fera ultérieurement et induira un terme d'erreur lorsque les bornes $P_1,...,P_r$ sont « assez proches »). Quitte à permuter les variables, nous pouvons supposer

$$P_1\geqslant P_2\geqslant ...\geqslant P_r,$$

et nous poserons $P_j=P_r^{b_j}$, avec $b_j\geqslant 1$ pour tout $j\in\{1,...,r\}$.

Notons e la fonction $x\mapsto\exp(2i\pi x)$ et remarquons que

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)=\int_0^1 S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)d\alpha,$$

où $S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)$ est la série génératrice :

$$S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)=\sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor\leqslant P_j\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}\left(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1\right)^{a_{i,j}}}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right). \tag{4.4}$$

L'objectif des sections 4.3.2 et 4.3.3 est de démontrer la proposition ci-dessous (K étant un paramètre bien choisi que nous préciserons), $\mathfrak{M}(\theta)$ désignant une réunion d'arcs majeurs :

Proposition 4.3.9. *Pour tout $\alpha\in[0,1[$ et tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. *on a la majoration :*

$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j+1}\right) P^{-K\theta+\varepsilon},$$

2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}(\theta)$.*

Rappelons que chaque variable x_i admet un poids $(a_{i,1},...,a_{i,r})$ relatif à l'action de T_{NS}. Choisissons à présent, comme dans la proposition 4.3.8, un ensemble de degrés $(t_{j,k})_{\substack{j\in\{1,...,r\}\\ k\in\{1,...,d_j\}}}$ vérifiant

$$\forall j \in \{1,...,r\},\ \sum_{k\geqslant 1} kt_{j,k} = d_j.$$

Dans ce qui va suivre nous allons appliquer une forme de différenciation de Weyl appropriée, en utilisant les résultats présentés dans le paragraphe précédent, afin de donner une majoration assez précise de $S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)$. Remarquons que la majoration obtenue ne dépendra que de $F_{\boldsymbol{t}}$ pour l'ensemble de degrés $\boldsymbol{t}$ choisi.

Considérons la majoration triviale :

$$\begin{aligned}|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| &\ll \sum_{k_1=1}^{P_1} ... \sum_{k_r=1}^{P_r} \Big| \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\\ \lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \rfloor = k_j\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right) \Big| \\ &= \sum_{k_1=1}^{P_1} ... \sum_{k_r=1}^{P_r} \Big| \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r}\\ k_j \leqslant |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| < k_j+1\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right) \Big|.\end{aligned}$$

Or, étant donné que $(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)} = \prod_{k=1}^r (e_{i_k}x_{i_k})^{\beta_{n+j,k}}$ et puisque, d'après la remarque 4.2.3, la matrice $(\beta_{n+j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant r}$ est la matrice inverse de $(a_{i_l,j})_{1\leqslant l,j\leqslant r}$, on a que

$$\left\{\begin{array}{l} k_j \leqslant |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| < k_j+1 \\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall i,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}} \\ \forall i \in \{i_1,...,i_r\},\ \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r k_j^{a_{i,j}} \leqslant |x_i| < \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}. \end{array}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\boldsymbol{k}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+r} \mid \forall i,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}} \\ \forall i \in \{i_1,...,i_r\},\ \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r k_j^{a_{i,j}} \leqslant |x_i| < \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}\},\end{aligned}$$

et on a alors que

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k}} = \bigcup_{\mathcal{I}\subset\{1,...,n+r\}} \mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I}},$$

où $\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I}}$ est la boîte

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{k}} \mid \forall i \in \mathcal{I},\ x_i \geqslant 0 \text{ et } \forall i \notin \mathcal{I},\ x_i < 0\}$$

que l'on peut noter

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I}} = \prod_{i=1}^{n+r} \mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i},$$

$\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i}$ étant alors un intervalle de taille $O(\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}})$. L'estimation de $|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)|$ se ramène à celle de

$$\sum_{k_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{k_r=1}^{P_r} |S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|$$

où $\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_r)$, $\mathcal{I} \subset \{1, ..., n+r\}$ et

$$S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I}}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right). \tag{4.5}$$

Considérons à présent le plus grand entier $k \in \{1, ..., d_r\}$ tel que $t_{r,k} \geqslant 1$. Par une inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{t_{r,k}}} = \left| \sum_{(x_i)_{i\notin J(r,k)}\in\prod_{i\notin J(r,k)}\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i}} \ \sum_{(x_i)_{i\in J(r,k)}\in\prod_{i\in J(r,k)}\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right)\right|^{2^{t_{r,k}}}$$

$$\ll \prod_{i\notin J(r,k)} \left(\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)^{2^{t_{r,k}}-1} \sum_{\substack{(x_i)_{i\notin J(r,k)} \\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}}} \left|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I},(r,k)}(\alpha)\right|^{2^{t_{r,k}}}$$

avec

$$S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I},(r,k)}(\alpha) = \sum_{(x_i)_{i\in J(r,k)}\in\prod_{i\in J(r,k)}\mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right). \tag{4.6}$$

Pour simplifier les notations nous noterons :

$$\forall i \in \{1, ..., n+r\},\quad B_i = \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}},\quad T_i = \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(P_j+1)^{a_{i,j}},$$

et nous supposerons que $T_i \geqslant 1$ pour tout i. On pose par ailleurs

$$\mathcal{U} = \prod_{i\in J(r,k)} \mathcal{B}_{\boldsymbol{k},\mathcal{I},i}$$

et on définit
$$\mathcal{U}^D = \mathcal{U} - \mathcal{U},$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}((x_i^{(1)})_{i\notin J(r,k)}, ..., (x_i^{(t)})_{i\notin J(r,k)}) \\ &\qquad = \bigcap_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_t)\in\{0,1\}^t} (\mathcal{U}_N - \varepsilon_1(x_i^{(1)})_{i\notin J(r,k)} - ... - \varepsilon_t(x_i^{(t)})_{i\notin J(r,k)}).\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})$ (pour $\boldsymbol{e}$ fixé). On remarque que ce polynôme est quasi-r-homogène de r-degré $(d_1, ..., d_r)$ (car F l'est). En utilisant l'équation (11.2) de [Schm], on obtient la majoration :

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I},(r,k)}(\alpha)|^{2^{t_{r,k}}} \ll \left(\prod_{i\in J(r,k)} B_i\right)^{2^{t_{r,k}}-t_{r,k}-1} \sum_{\substack{(x_i^{(1)})_{i\in J(r,k)}\\ |x_i^{(1)}|\leqslant B_i}} \cdots \sum_{\substack{(x_i^{(t_{r,k}-1)})_{i\in J(r,k)}\\ |x_i^{(t_{r,k}-1)}|\leqslant B_i}}$$
$$\left|\sum_{(x_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\in\mathcal{U}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)} e\left(\alpha\mathcal{F}_{t_{r,k}}((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}\}\\ i\in J(r,k)}})\right)\right|^2 .$$

Or, on a

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{(x_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\in\mathcal{U}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)} e\left(\alpha\mathcal{F}_{t_{r,k}}((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}\}\\ i\in J(r,k)}})\right)\right|^2 \\ &= \sum_{(y_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\in\mathcal{U}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)} \ \sum_{(z_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\in\mathcal{U}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)}\end{aligned}$$
$$e\left(\alpha\left(\mathcal{F}_{t_{r,k}}((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}, (y_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}) - \mathcal{F}_{t_{r,k}}((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}, (z_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)})\right)\right).$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned}&(x_i^{(t_{r,k}+1)})_{i\in J(r,k)} = (y_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)} \\ &(x_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)} = (z_i^{(t_{r,k})} - y_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)},\end{aligned}$$

on observe que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{t_{r,k}}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}, (y_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\right) &- \mathcal{F}_{t_{r,k}}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}-1\}\\ i\in J(r,k)}}, (z_i^{(t_{r,k})})_{i\in J(r,k)}\right)\\
&= \mathcal{F}_{t_{r,k}+1}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}\\ i\in J(r,k)}}\right) - \mathcal{F}_{t_{r,k}}\left((x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}\}\\ i\in J(r,k)}}\right)\\
&= \Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k)\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}}\right).
\end{aligned}
$$

On a ainsi :

$$
\begin{aligned}
|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{t_{r,k}}} \ll &\left(\prod_{i\notin J(r,k)} T_i\right)^{2^{t_{r,k}}-1}\left(\prod_{i\in J(r,k)} T_i\right)^{2^{t_{r,k}}-t_{r,k}-1}\\
&\sum_{\substack{(x_i)_{i\notin J(r,k)}\\ |x_i|\leqslant T_i}}\ \sum_{\substack{(x_i^{(l)})\\ i\in J(r,k)\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}} e\left(\alpha\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)}, (x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{t_{r,k}}-1}\left(\prod_{i\in J(r,k)} T_i\right)^{-t_{r,k}}\sum_{\substack{(x_i)_{i\notin J(r,k)}\\ |x_i|\leqslant T_i}}\ \sum_{(x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}\\ i\in J(r,k)}}}\\
&\qquad e\left(\alpha\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)}, (x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Par la suite, on procède de même avec les variables $(x_i)_{i\in J(r,k')}$ où k' est le plus grand entier naturel non nul tel que $k'<k$ et $t_{r,k'}\neq 0$. En utilisant la majoration précédente, par une inégalité de Hölder on trouve :

$$(4.7)\quad |S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{t_{r,k}+t_{r,k'}}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{t_{r,k}+t_{r,k'}}-2^{t_{r,k'}}} \left(\prod_{i\in J(r,k)} T_i\right)^{-t_{r,k}2^{t_{r,k'}}}$$

$$\left(\prod_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')} T_i\right)^{2^{t_{r,k'}}-1} \left(\prod_{\substack{i\in J(r,k)\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}} T_i\right)^{2^{t_{r,k'}}-1} \sum_{(x_i)_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')}} \sum_{\substack{(x_i^{(l)})_{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}\\ i\in J(r,k)}}$$

$$\left|\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J(r,k')}\\ |x_i|\leqslant T_i}} e\left(\alpha\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)}, (x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}\\ i\in J(r,k)}}\right)\right)\right|^{2^{t_{r,k'}}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{t_{r,k}+t_{r,k'}}-2^{t_{r,k'}}} \left(\prod_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')} T_i\right)^{2^{t_{r,k'}}-1} \left(\prod_{i\in J(r,k)} T_i\right)^{2^{t_{r,k'}}-t_{r,k}-1}$$

$$\sum_{(x_i)_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')}} \sum_{\substack{(x_i^{(l)})_{l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}\\ i\in J(r,k)}} |S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},(k',r)}(\alpha)|^{2^{t_{r,k'}}}$$

où
(4.8)

$$S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},(k',r)}(\alpha) = \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J(r,k')}\\ |x_i|\leqslant T_i}} e\left(\alpha\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k)\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k}+1\}}}\right)\right).$$

De la même manière que précédemment, on trouve :

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},(k',r)}(\alpha)|^{2^{t_{r,k'}}} \ll \left(\prod_{i\in J(r,k')} T_i\right)^{2^{t_{r,k'}}-t_{r,k'}-1} \sum_{(x_i^{(1)})_{i\in J(r,k)}} \cdots \sum_{(x_i^{(t_{r,k'}+1)})_{i\in J(r,k')}} \sum_{(x_i^{(t_{r,k'})})_{i\in J(r,k')}}$$

$$e\left(\alpha\Delta_{(r,k')}^{(t_{r,k'})}\circ\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k)\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k}\}}}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k')\\ l\in\{1,\dots,t_{r,k'}+1\}}}\right)\right)$$

On obtient alors, par la majoration (4.7),

(4.9)

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k}}(\alpha)|^{2^{t_{r,k}+t_{r,k'}}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{t_{r,k}+t_{r,k'}}-1} \left(\prod_{i\in J(r,k)} T_i\right)^{-t_{r,k}} \left(\prod_{i\in J(r,k')} T_i\right)^{-t_{r,k'}}$$
$$\sum_{(x_i)_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')}} \sum_{\substack{(x_i^{(l)}) \\ i\in J(r,k) \\ l\in\{1,...,t_{r,k}+1\}}} \sum_{\substack{(x_i^{(l)}) \\ i\in J(r,k') \\ l\in\{1,...,t_{r,k'}+1\}}}$$
$$e\left(\alpha\Delta_{(r,k')}^{(t_{r,k'})}\circ\Delta_{(r,k)}^{(t_{r,k})}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r,k)\cup J(r,k')}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k) \\ l\in\{1,...,t_{r,k}+1\}}}, (x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r,k') \\ l\in\{1,...,t_{r,k'}+1\}}}\right)\right)$$

Par récurrence, on obtient finalement, en posant pour tout $j\in\{1,...,r\}$

$$D_j = \sum_{k\geqslant 1} t_{j,k}, \tag{4.10}$$

$$J(j) = \bigcup_{k\geqslant 1} J(j,k), \tag{4.11}$$

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_r}-1} \left(\prod_{i\in J(r)} T_i^{-t_{r,a_{i,r}}}\right) \sum_{(x_i)_{i\notin J(r)}} \tag{4.12}$$
$$\sum_{\substack{(x_i^{(l)}) \\ i\in J(r) \\ l\in\{1,...,t_{r,a_{i,r}}+1\}}} e\left(\alpha\Delta^{\boldsymbol{t}_r}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin J(r)}, (x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t_{r,a_{i,r}}+1\} \\ i\in J(r)}}\right)\right).$$

Si $i\in I_0$ et $i\notin J(r)$ (i.e si $a_{i,r}=0$), nous noterons dorénavant $x_i^{(1)}=x_i$. Nous poserons par ailleurs, pour tout $j\in\{1,...,r\}$,

$$t'_{j,k} = \begin{cases} t_{r,k}+1 & \text{si} \quad k\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad k=0. \end{cases}$$

La majoration précédente peut alors être réécrite :

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_r}} \left(\prod_{i\notin I_0} T_i\right)^{-1} \left(\prod_{i\notin I_0} T_i^{-t'_{r,a_{i,r}}}\right) \sum_{(x_i)_{i\notin I_0}} \tag{4.13}$$
$$\sum_{\substack{(x_i^{(l)}) \\ i\in I_0 \\ l\in\{1,...,t'_{r,a_{i,r}}\}}} e\left(\alpha\Delta^{\boldsymbol{t}_r}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin I_0}, (x_i^{(l)})_{\substack{l\in\{1,...,t'_{r,a_{i,r}}\} \\ i\in I_0}}\right)\right).$$

Nous pouvons à présent effectuer les mêmes opérations que précédemment avec les variables $(x_i^{(l)})_{\substack{i\in J(r-1,k)\\ l\in\{1,...,t'_{r,k}\}}}$ pour les $k \geqslant 1$ tels que $t_{r-1,k} > 0$. On obtient alors la majoration :

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_r+D_{r-1}}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_r+D_{r-1}}} \left(\prod_{i\notin I_0} T_i\right)^{-1} \left(\prod_{i\in I_0} T_i^{-t'_{r,a_{i,r}}t'_{r-1,a_{i,r-1}}}\right)$$
$$\sum_{(x_i)_{i\notin I_0}} \sum_{\substack{(x_i^{(l,l')})\\ l\in\{1,...,t'_{r,a_{i,r}}\}\\ l'\in\{1,...,t'_{r-1,a_{i,r-1}}\}\\ i\in I_0}} e\left(\alpha\Delta^{\boldsymbol{t}_{r-1}}\circ\Delta^{\boldsymbol{t}_r}\mathcal{F}\left((x_i)_{i\notin I_0},(x_i^{(l,l')})_{\substack{l\in\{1,...,t'_{r,a_{i,r}}\}\\ l'\in\{1,...,t'_{r-1,a_{i,r-1}}\}\\ i\in I_0}}\right)\right).$$

En procédant de même, on obtient, par récurrence :

(4.14)
$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_1+D_2+...+D_r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_1+...+D_r}} \left(\prod_{i\notin I_0} T_i\right)^{-1} \left(\prod_{i\in I_0} T_i^{-\prod_{j=1}^r t'_{j,a_{i,j}}}\right)$$
$$\sum_{\boldsymbol{x}_0=(x_i)_{i\notin I_0}} \sum_{\widetilde{\mathbf{X}}=(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}}} e\left(\alpha\Delta^{\boldsymbol{t}_1}\circ...\circ\Delta^{\boldsymbol{t}_r}\mathcal{F}\left(\boldsymbol{x}_0,\widetilde{\mathbf{X}}\right)\right).$$

Rappelons que, d'après la proposition 4.3.8, on peut écrire :

$$\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0,\widetilde{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{X}),$$

où $\Gamma(\mathbf{X}) \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$ est de degré $t_{j,k}$ en $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k)}$ et linéaire en chaque $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k,h)}$ pour tout $(j,k)\in\mathcal{C}_0$ et $h\in\{1,...,t_{j,k}\}$. En particulier, on remarque que pour tout $(j,k)\in\mathcal{C}_0$, on peut écrire $\Gamma(\mathbf{X})$ sous la forme :

$$e_i \sum_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j,k)} \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j,k)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(j,k)})\mathbf{x}_i^{\boldsymbol{l}},$$

où $\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j,k)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(j,k)})$ est de degré $t_{j,k}-1$ en $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k)}$ et linéaire en chaque $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L(j,k,h)}$ pour tout $h\in\{1,...,t_{j,k}-1\}$.

Notons à présent

(4.15)
$$K = \max_{t_{1,k}\neq 0} k.$$

Nous pouvons majorer la somme apparaissant dans l'inégalité (4.14) par :

(4.16)

$$\sum_{\boldsymbol{x}_0} \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}\setminus E(1,K)}} \left| \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}} e\left(\alpha\Delta^{\boldsymbol{t}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0,\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)},(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)})\right)\right|$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}_0} \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}\setminus E(1,K)}} \left| \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}} e\left(\alpha e_i \sum_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})x_i^{\boldsymbol{l}}\right)\right|.$$

La dernière somme de (4.16) peut être réécrite :

$$\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \left| \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}} e\left(\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})\mathbf{x}_i^{\boldsymbol{l}}\right)\right|. \tag{4.17}$$

En notant pour tout réel x

$$||x|| = \inf_{m\in\mathbf{Z}} |x-m|,$$

et en considérant la majoration, pour $P \gg 1$

$$\sum_{m\in I(P)\cap\mathbf{Z}} e(\beta m) \ll \min\{P, ||\beta||^{-1}\}$$

pour tout intervalle $I(P)$ de taille $O(P)$, on remarque que l'on peut majorer (4.17) par :

$$\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \min\left(T_i, ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})||^{-1}\right). \tag{4.18}$$

On obtient ainsi, à partir de (4.14), la majoration

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_1+D_2+\ldots+D_r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_1+\ldots+D_r}} \left(\prod_{i\notin I_0} T_i\right)^{-1} \left(\prod_{i\in I_0} T_i^{-\prod_{j=1}^r t'_{j,a_{i,j}}}\right)$$
$$\sum_{\boldsymbol{x}_0} \sum_{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}\setminus E(1,K)}} \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \min\left(T_i, ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})||^{-1}\right)$$
$$\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_1+\ldots+D_r}} \left(\prod_{i\in I_0} T_i^{-\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}\right) \sum_{\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)}=(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L\setminus E(1,K)}}$$
$$\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \min\left(T_i, ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})||^{-1}\right)$$

en notant $t_{j,0}=1$ pour tout $j\in\{1,...,r\}$ (puisque le terme (4.18) est indépendant des $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{\substack{(i,\boldsymbol{l})\in\tilde{L}\\ i\in J(j,k),\, l_j=t_{j,k}+1}}$ pour tout $(j,k)\in\mathcal{C}_0$, on peut remplacer les sommes en ces variables par un $O(\prod_{(j_0,k)\in\mathcal{C}_0}\prod_{i\in J(j_0,k)}T_i^{t_{j_0,a_{i,j_0}}\prod_{j\neq j_0}t'_{j,a_{i,j}}})$, de telle sorte que les seules variables que nous aurons à considérer dorénavant sont les variables $(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L})$.

Considérons à présent

$$\boldsymbol{r}=(r_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\in\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\{0,1,...,T_i\}$$

et choisissons

$$K'=\max_{k\in\mathcal{P}(1)\mid k<K,\, t_{1,K'}\neq 0}k,$$

où $\mathcal{P}(1)=\{k\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\mid \exists i\in I_0\mid a_{i,1}=k\}$. Pour

$$\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}=(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in\widehat{L}(1,K)\cap\widehat{L}(1,K')}$$

fixé, nous noterons $\mathcal{A}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}},\boldsymbol{r}\right)$ l'ensemble des vecteurs $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}$ tels que :

$$\left|x_m^{\boldsymbol{h}}\right|<T_m,$$

et

$$\forall(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K),\quad ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})||\in[r_{i,\boldsymbol{l}}T_i^{-1},(r_{i,\boldsymbol{l}}+1)T_i^{-1}]$$

et $A(\mathbf{X},\boldsymbol{r})$ le cardinal de cet ensemble. On a alors, en reprenant les équations (4.14), (4.17), (4.16), l'estimation

$$|S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_1+D_2+...+D_r}}\ll\left(\prod_{i=1}^{n+r}T_i\right)^{2^{D_1+...+D_r}}\left(\prod_{i\in I_0}T_i^{-\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}\right.$$
$$\left.\sum_{\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}}\sum_{\boldsymbol{r}}A\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}},\boldsymbol{r}\right)\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\min\left(T_i,\max\left(\frac{T_i}{r_{i,\boldsymbol{l}}},\frac{T_i}{T_i-r_{i,\boldsymbol{l}}-1}\right)\right)\right).$$

Si par ailleurs $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}$ et $(y_m^{\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbf{X},\boldsymbol{r})$, on a alors que

$$|x_m^{\boldsymbol{h}}-y_m^{\boldsymbol{h}}|\ll T_m,$$

et d'autre part, pour tous $(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)$:

$$\gamma^{(1,K)}_{(i,\boldsymbol{l})}(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}, (x^{\boldsymbol{h}}_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}) - \gamma^{(1,K)}_{(i,\boldsymbol{l})}(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}, (y^{\boldsymbol{h}}_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}) = \gamma^{(1,K)}_{(i,\boldsymbol{l})}(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}, (x^{\boldsymbol{h}}_m - y^{\boldsymbol{h}}_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}).$$

On note alors $N\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}\right)$ le cardinal de l'ensemble des $(x^{\boldsymbol{h}}_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')}$ tels que

$$\left|x^{\boldsymbol{h}}_m\right| < T_m,$$

$$\forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K), \quad ||\alpha e_i \gamma^{(1,K)}_{(i,\boldsymbol{l})}(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}, (x^{\boldsymbol{h}}_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,K')})|| < T_i^{-1},$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} (4.19) \quad & \sum_{\boldsymbol{r}} A\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}, \boldsymbol{r}\right) \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \min\left(T_i, \max\left(\frac{T_i}{r_{i,\boldsymbol{l}}}, \frac{T_i}{T_i - r_{i,\boldsymbol{l}} - 1}\right)\right) \\ & \ll N\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}\right) \sum_{\boldsymbol{r}} \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \min\left(T_i, \max\left(\frac{T_i}{r_{i,\boldsymbol{l}}}, \frac{T_i}{T_i - r_{i,\boldsymbol{l}} - 1}\right)\right) \\ & = N\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}\right) \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} \sum_{r_{i,\boldsymbol{l}}} \min\left(T_i, \max\left(\frac{T_i}{r_{i,\boldsymbol{l}}}, \frac{T_i}{T_i - r_{i,\boldsymbol{l}} - 1}\right)\right) \\ & \ll N\left(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(1,K)\\(1,K')}}\right) \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} T_i \log(T_i). \end{aligned}$$

Notons pour tout $(j,k) \in \mathcal{C}_0$:

$$(4.20) \qquad \mathcal{M}_{(j,k)}\left(\alpha, (A_{m,\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j,k)}, (B_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j,k)}\right)$$

l'ensemble des $\widehat{\mathbf{X}}_{(j,k)}$ tels que, pour tout $(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus E(j,k)$

$$|x^{(\boldsymbol{h})}_m| < A_{m,\boldsymbol{h}},$$

et pour tout $(i,\boldsymbol{l}) \in E(j,k)$

$$||\alpha e_i \gamma^{(j,k)}_{(i,\boldsymbol{l})}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})|| < B_{i,\boldsymbol{l}}.$$

On note par ailleurs

$$(4.21) \qquad M_{(j,k)}\left(\alpha, (A_{m,\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j,k)}, (B_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j,k)}\right)$$

le cardinal de cet ensemble. On obtient (à partir de (4.19)) :

$$(4.22)\quad |S_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\mathcal{I}}(\alpha)|^{2^{D_1+D_2+...+D_r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{2^{D_1+...+D_r}} \left(\prod_{i\in I_0} T_i\right)^{-\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}} \prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} T_i \log(T_i)$$
$$\times M_{(1,K)}\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right).$$

En remarquant que

$$\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)} T_i \log(T_i) = \prod_{i\in J(1,K)} (T_i \log(T_i))^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}},$$

et en sommant la majoration obtenue dans (4.22) sur les $\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_r)$ tels que $k_j \leqslant P_j$, et sur les $\mathcal{I} \subset \{1, ..., n+r\}$, on obtient le lemme ci-dessous :

Lemme 4.3.10. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit on a*

$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{j=1}^r P_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{(1+\varepsilon)} \left(\prod_{i\in I_0} T_i^{-\frac{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}{2^{D_1+D_2+...+D_r}}}\right)$$
$$\times \left(\prod_{i\in J(1,K)} T_i^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}}\right)^{2^{-(D_1+D_2+...+D_r)}}$$
$$\times \left(M_{(1,K)}\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right)\right)^{2^{-(D_1+D_2+...+D_r)}},$$

4.3.3 Géométrie des réseaux

Dans cette partie, nous allons chercher à obtenir une bonne estimation de

$$M_{(1,K)}\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right).$$

Plus précisément si Λ est un réseau de dimension d et si C est un corps convexe de $\Lambda \otimes \mathbf{R}$ contenant l'origine, on a alors pour tout $P \geqslant 1$ et tout réel $\theta \in [0,1]$:

$$(4.23)\qquad \mathrm{Card}(\Lambda \cap PC) \ll (P/P^\theta)^d \,\mathrm{Card}(\Lambda \cap P^\theta C).$$

C'est le principe général de la méthode utilisée dans ce qui va suivre : il s'agit de considérer

$$M_{(1,K)}\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right).$$

comme une famille d'intersections de réseaux avec des corps convexes et d'utiliser des lemmes issus de la section 3.3.2 (qui donnent des versions de l'inégalité (4.23) adaptées aux cas qui nous intéressent) afin de réduire les bornes intervenant dans $M_{(1,K)}$, ce qui nous sera utile ultérieurement pour définir les arcs majeurs et les arcs mineurs. Nous allons appliquer les résultats du chapitre 2 très progressivement. Trois formes de récurrence seront nécessaires pour réduire entièrement les bornes.

Première récurrence

Dans cette partie, nous allons appliquer les résultats de géométrie des réseaux uniquement aux variables $x_m^{\boldsymbol{h}}$ telles que $m \in J(j,k)$ pour un (j,k) fixé (en l'occurence $(j,k) = (1,K)$).

Nous allons dans un premier temps majorer, pour $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus L(1,K)}$ et $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{\substack{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \\ h_1 \neq t_{1,K}-1}}$ fixés, le nombre de $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{\substack{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \\ h_1 = t_{1,K}-1}}$ tels que

$$\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)} = (x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K)} \in \mathcal{M}_{(1,K)} \left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \right).$$

Nous allons pour cela appliquer les résultats de géométrie des réseaux évoqués dans la section 2.3.2.

Pour $\boldsymbol{b} = (b_m)_{m \in J(1,K)}$ fixé et tout $Z \leqslant 1$ on notera provisoirement

$$\begin{aligned} U(Z) = \operatorname{Card}\{ (x_m^{\boldsymbol{h}})_{\substack{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \\ h_1 = t_{1,K}-1}} \mid \forall (m,\boldsymbol{h}),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant b_m Z \\ \text{et, } \forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K),\ ||\alpha e_i \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})|| < b_i^{-1} Z \}. \end{aligned}$$

En choisissant $Z_2 = 1$ et $b_m = T_m$ pour tout $m \in J(1,K)$, on remarque alors que le cardinal que nous souhaitons majorer est $U(Z_2)$. Or d'après le lemme 2.3.4, puisque les formes $\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})$ sont linéaires en $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{\substack{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \\ h_1 = t_{1,K}-1}}$ et vérifient les conditions de symétrie

$$\forall (j,k) \in \mathcal{C}_0,\ e_i \sum_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(j,k)} \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j,k)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(j,k)}) \mathbf{x}_i^{\boldsymbol{l}} = \Gamma(\mathbf{X}),$$

pour tout $Z_1 \leqslant Z_2$ on a

$$U(Z_2) \ll \prod_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \mid h_1 = t_{1,K}-1} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) U(Z_1).$$

Nous allons choisir Z_1 tel que

$$b_m Z_1 = \frac{T_m}{P_1^K} P^{K\theta},$$

pour $\theta \in [0,1]$ fixé quelconque. Ceci est possible en prenant

$$Z_1 = \frac{P^{K\theta}}{P_1^K}.$$

On obtient donc

$$U(Z_2) \ll \prod_{m \in J(1,K)} \left(\frac{P_1^K}{P^{K\theta}} \right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} U(Z_1),$$

avec $K = a_{m,1}$ pour tout $m \in J(1,K)$. En appliquant le même procédé avec les variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K) \mid h_1 = t_{1,K}-h}$ avec h fixé égal à $2, ..., t_{1,K}-1$, nous allons établir le résultat ci-dessous

Lemme 4.3.11. *Pour tout $\theta \in [0,1]$, on a la majoration ci-dessous :*

$$\begin{aligned} M_{(1,K)} & \left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \right) \\ & \ll \prod_{m \in J(1,K)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}} \right)^{(t_{1,K}-1)\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} \\ & M_{(1,K)} \Bigg(\alpha, \left((T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus L(1,K)}, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K)} \right), \\ & \qquad (P_1^{-(t_{1,a_{i,1}}-1)a_{i,1}} P^{(t_{1,a_{i,1}}-1)a_{i,1}\theta} T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \Bigg). \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur $h \in \{1, ..., t_{1,K}-1\}$ que

(4.24)

$$\begin{aligned} & M_{(1,K)} \left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \right) \\ & \ll \prod_{m \in J(1,K)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}} \right)^{h \prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} M_{(1,K)} \Bigg(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus \bigcup_{l=0}^h L(1,K,t_{1,K}-l)}, \\ & \qquad (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \bigcup_{l=1}^h L(1,K,t_{1,K}-l)} \Big), \\ & \qquad (P_1^{-h a_{i,1}} P^{h a_{i,1}\theta} T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \Bigg). \end{aligned}$$

Le résultat a déjà été démontré précédemment pour $h = 1$, en notant que $K = a_{m,1}$ pour tout $m \in J(1,K)$. Supposons le résultat vrai au rang h. Fixons des éléments $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus \bigcup_{l=0}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m$ et $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \bigcup_{l=1}^h L(1,K,t_{1,K}-l)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta}$. Posons alors, pour $Z \geqslant 1$, $b_m \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} U(Z) = \operatorname{Card}\{ & (x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L(1,K,t_{1,K}-(h+1))} \mid \forall (m,\boldsymbol{h}),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant b_m Z \\ & \text{et, } \forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K),\ ||\alpha e_i \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})|| < b_i^{-1} Z \}. \end{aligned}$$

Choisissons alors pour tout $m \in J(1,K)$:

$$\begin{aligned} b_m &= P_1^{\frac{1}{2}hK} P^{-\frac{1}{2}hK\theta} T_m \\ Z_2 &= P_1^{-\frac{1}{2}hK} P^{\frac{1}{2}hK\theta} \\ Z_1 &= P_1^{-K} P^{K\theta} Z_2, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} b_m Z_2 &= T_m \\ b_m Z_1 &= T_m P_1^{-K} P^{K\theta} \\ b_m^{-1} Z_2 &= T_m^{-1} P_1^{-hK} P^{hK\theta} \\ b_m^{-1} Z_1 &= T_m^{-1} P_1^{-(h+1)K} P^{(h+1)K\theta}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} U(Z_2) = \mathrm{Card}\{ (x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L(1,K,t_{1,K}-(h+1))} \mid \forall (m,\boldsymbol{h}),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m \\ \text{et, } \forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K),\ ||\alpha e_i \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})|| < T_m^{-1} P_1^{-hK} P^{hK\theta} \}, \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.3.7,

$$\begin{aligned} U(Z_2) &\ll \left(\prod_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K,t_{1,K}-(h+1))} \frac{Z_2}{Z_1} \right) U(Z_1) \\ &= \left(\prod_{(m,\boldsymbol{h}) \in \widehat{L}(1,K,t_{1,K}-(h+1))} \frac{P_1^K}{P^{K\theta}} \right) U(Z_1) \\ &= \left(\prod_{m \in J(1,K)} \left(\frac{P_1^K}{P^{K\theta}} \right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} \right) U(Z_1), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} U(Z_1) = \mathrm{Card}\{ (x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L(1,K,t_{1,K}-(h+1))} \mid \forall (m,\boldsymbol{h}),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m P_1^{-K} P^{K\theta} \\ \text{et } \forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K),\ ||\alpha e_i \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,K)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,K)})|| < T_m^{-1} P_1^{-(h+1)K} P^{(h+1)K\theta} \}. \end{aligned}$$

En sommant ces majorations sur l'ensemble des $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus \bigcup_{l=0}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m$ et $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \bigcup_{l=1}^{h} L(1,K,t_{1,K}-l)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta}$, on obtient

$$\begin{aligned} M_{(1,K)} \Big(\alpha, \Big(&(T_m)_{(m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus \bigcup_{l=0}^{h} L(1,K,t_{1,K}-l)}, \\ &(T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h}) \in \bigcup_{l=1}^{h} L(1,K,t_{1,K}-l)} \Big), \\ &(P_1^{-ha_{i,1}} P^{ha_{i,1}\theta} T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l}) \in E(1,K)} \Big) \end{aligned}$$

$$\ll \prod_{m\in J(1,K)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} M_{(1,K)}\Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{l=0}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{l=1}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}\Big), (P_1^{-(h+1)a_{i,1}} P^{(h+1)a_{i,1}\theta} T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\Big).$$

Puis en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} M_{(1,K)}&\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right) \\ &\ll \prod_{m\in J(1,K)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{(h+1)\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} \\ &\quad M_{(1,K)}\Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{l=0}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}, \\ &\quad (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{l=1}^{h+1} L(1,K,t_{1,K}-l)}\Big), \\ &\quad (P_1^{-(h+1)a_{i,1}} P^{(h+1)a_{i,1}\theta} T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\Big), \end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration de l'assertion (4.24). Le cas $h = t_{1,K} - 1$, correspond alors au résultat du lemme. □

Seconde récurrence : changement de poids k

Dans cette partie nous allons détailler le passage de variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in J(1,k)}$ aux variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in J(1,k')}$ pour un $k' \neq k$

Lemme 4.3.12. *Pour tout poids $k \in \mathcal{P}(1)$ et tout poids k_1 tel que $k_1 > k$, on a :*

$$\begin{aligned} M_{(1,k_1)}&\Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k} L(1,k')}, \\ &(T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), \\ &(T_i^{-1} P_1^{k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big) \\ &\ll \max\{M_1, M_2\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} M_1 = \prod_{m\in J(1,k)} &\left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{m,j}}} \\ M_{(1,k_1)}&\Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')}, \\ &(T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), \\ &(T_i^{-1} P_1^{k_1-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big), \end{aligned}$$

$$M_2=\frac{\prod_{m\in J(1,k)}T_m^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(1,k_1)}(P_1^{-a_{i,1}}P^{a_{i,1}\theta}T_i)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}}}\prod_{m\in J(1,k)}\left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{(t_{1,a_{m,1}}-1)\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}$$

$$\begin{aligned}M_{(1,k)}\quad&\Big(\alpha,\Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k}L(1,k')},\\&(T_mP_1^{-a_{m,1}}P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'\geqslant k}L(1,k')\setminus E(1,k)}\Big),\\&(T_i^{-1}P_1^{k-\sum_{k'\geqslant k}k't_{1,k'}}P^{-(k-\sum_{k'\geqslant k}k't_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k)}\Big).\end{aligned}$$

Démonstration. Fixons des éléments $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k}L(1,k')}$, $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L(1,k)\setminus E(1,k)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}|\leqslant T_m$ et $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k}L(1,k')}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}|\leqslant T_mP_1^{-a_{m,1}}P^{a_{m,1}\theta}$ et posons pour tous $Z\geqslant 1$ et $b_m>0$ pour $m\in J(1,k)$ et $c_i>0$ pour $i\in J(1,k_1)$:

$$\begin{aligned}U(Z)=\operatorname{Card}\{(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k)}\mid\forall(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}|\leqslant b_mZ\\ \text{et, }\forall(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k),\ ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(1,k_1)}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,k_1)})||<c_i^{-1}Z\}.\end{aligned}$$

On choisit à présent $\boldsymbol{b}=(b_m)_{m\in J(1,k)}$, $\boldsymbol{c}=(c_i)_{i\in J(1,k_1)}$, $Z_2\leqslant 1$ tels que

$$b_mZ_2=T_m,\quad c_i^{-1}Z_2=T_i^{-1}P_1^{k_1-\sum_{k'>k}k't_{1,k'}}P^{-(k_1-\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta},$$

et le nombre de points que l'on souhaite évaluer est alors $U(Z_2)$. Choisissons d'autre part un réel $Z_1\leqslant 1$ tel que

$$\begin{aligned}&\forall m\in J(1,k),\quad b_mZ_1=P_1^{-k}P^{k\theta}T_m,\\&\forall i\in J(1,k_1),\quad c_i^{-1}Z_1=T_i^{-1}P_1^{k_1-k-\sum_{k'>k}k't_{1,k'}}P^{-(k_1-k-\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta},\\&\forall i\in J(1,k_1),\quad c_iZ_1=T_iP_1^{-k_1}P^{k_1\theta}.\end{aligned}$$

On vérifie que ces conditions sur $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},Z_2,Z_1$ sont satisfaites si et seulement si

$$\begin{aligned}&Z_1=P_1^{-\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})}P^{\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta},\\&Z_2=Z_1P_1^kP^{-k\theta}\\&\forall m\in J(1,k),\quad b_m=T_mP_1^{-k+\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})}P^{k\theta-\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta},\\&\forall i\in J(1,k_1),\quad c_i=T_iP_1^{-k_1+\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})}P^{k_1\theta-\frac12(k+\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta},\end{aligned}$$

et on a alors $b_m^{-1}Z_1=P_1^{-\sum_{k'>k}k't_{1,k'}}P^{(\sum_{k'>k}k't_{1,k'})\theta}T_m^{-1}$. Par ailleurs, d'après le lemme 3.3.5 on a

(4.25)

$$U(Z_2)\ll\max\left(\underbrace{\left(\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k)}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)\right)U(Z_1)}_{(a)},\underbrace{\frac{\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k)}b_mZ_2}{\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}c_iZ_1}U^t(Z_1)}_{(b)}\right),$$

où

$$U^t(Z) = \mathrm{Card}\{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)} \mid \forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(1,k_1),\ |x_i^{\boldsymbol{h}}| \leqslant c_i Z$$
$$\text{et, } \forall (m,\boldsymbol{h}) \in L(1,k),\ ||\alpha e_i(\underbrace{\gamma^{(1,k_1)})^t_{(m,\boldsymbol{h})}}_{=\gamma^{(1,k)}_{(m,\boldsymbol{h})}}(\widehat{\mathbf{X}}_{(1,k)})|| < b_m^{-1} Z\}$$

(avec les notations de la section 3.3.2).

On remarque que

$$\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k)} \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) = \prod_{m\in J(1,k)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}},$$

et de même

$$\frac{\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(1,k)} b_m Z_2}{\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)} c_i Z_1} = \frac{\prod_{m\in J(1,k)} T_m^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(1,k_1)} (P_1^{-a_{i,1}} P^{a_{i,1}\theta} T_i)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}}}.$$

La formule (4.25) donne alors, par sommation sur les éléments $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k} L(1,k')}$, $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L(1,k)\setminus E(1,k)}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m$ et $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')}$ tels que $|x_m^{\boldsymbol{h}}| \leqslant T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta}$:

$$\begin{aligned} M_{(1,k_1)} \quad & \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k} L(1,k')}, \\ & (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), \\ & (T_i^{-1} P_1^{k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \ll \max\{A_1, A_2\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 = & \prod_{m\in J(1,k_1)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} \\ & M_{(1,k_1)} \quad \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k} L(1,k')}, \\ & (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L(1,k,t_{1,k})\cup\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), \\ & (T_i^{-1} P_1^{k_1-k-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-k-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big), \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{\prod_{m\in J(1,k)} T_m^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(1,k_1)} (P_1^{-a_{i,1}} P^{a_{i,1}\theta} T_i)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}}}$$
$$M_{(1,k)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')},\\ (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k)}\Big),\\ (T_i^{-1} P_1^{-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{\sum_{k'>k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k)}\Big).$$

Or, par les mêmes arguments que pour le lemme 4.3.11, on démontre que :

$$M_{(1,k)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')},\\ (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k)}\Big),\\ (T_i^{-1} P_1^{-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{\sum_{k'>k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k)}\Big)$$
$$\ll \prod_{m\in J(1,k)} \left(\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{(t_{1,a_{m,1}}-1)\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}$$
$$M_{(1,k)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')},\\ (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')\setminus E(1,k)}\Big),\\ (T_i^{-1} P_1^{k-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'}} P^{-(k-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k)}\Big).$$

On en déduit donc que $A_2 \ll M_2$. Il reste à réduire les bornes intervenant dans A_1. Pour cela on réitère le procédé développé au cours de cette démonstration avec les familles de variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L(1,k_1,h)}$ pour $h \in \{1, ..., t_{1,k_1} - 2\}$. On constate qu'à terme on obtient : $A_1 \ll \max\{M_1, M_2\}$, d'où le résultat. □

Nous avons donc ici démontré que, pour tout poids $k \in \mathcal{P}(1)$ et tout poids k_1 tel que $k_1 > k$:

$$\left(\prod_{m\in J(1,k_1)} T_m^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}\right) M_{(1,k_1)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'>k} L(1,k')}, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'>k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), (T_i^{-1} P_1^{k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-\sum_{k'>k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big)$$

$$\ll \left(\prod_{m\in J(1,k)} (\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}})^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{m,j}}}\right) \times \max\Bigg\{ \prod_{m\in J(1,k_1)} \left(T_m \frac{P^{a_{m,1}\theta}}{P_1^{a_{m,1}}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} M_{(1,k_1)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')}, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')\setminus E(1,k_1)}\Big), (T_i^{-1} P_1^{k_1-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'}} P^{-(k_1-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k_1)}\Big),$$

$$\prod_{m\in J(1,k)} \left(T_m \frac{P^{a_{m,1}\theta}}{P_1^{a_{m,1}}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}} M_{(1,k)} \Big(\alpha, \Big((T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')}, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in\bigcup_{k'\geqslant k} L(1,k')\setminus E(1,k)}\Big), (T_i^{-1} P_1^{k-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'}} P^{-(k-\sum_{k'\geqslant k} k' t_{1,k'})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,k)}\Big)\Bigg\}.$$

Corollaire 4.3.13. *Pour tout $\theta \in [0,1]$, on a la majoration ci-dessous*

$$\left(\prod_{m\in J(1,K)} T_m^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}\right) M_{(1,K)} \big(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\big)$$

$$\ll \left(\prod_{m\in I_0} (\frac{P_1^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}})^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{m,j}}}\right) \max_{K_1\in\mathcal{P}(1)} \{ \left(\prod_{m\in J(1,K_1)} \left(T_m \frac{P^{a_{m,1}\theta}}{P_1^{a_{m,1}}}\right)^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{m,j}}}\right) M_{(1,K_1)} \Big(\alpha, (T_m P_1^{-a_{m,1}} P^{a_{m,1}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K_1)}, (T_i^{-1} P_1^{K_1-d_1} P^{(d_1-K_1)\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K_1)}\Big)\}.$$

Troisième récurrence : changement d'indice j

Dans cette partie nous allons traiter le passage des variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{m\in J(j,k)}$ aux variables $(x_m^{\boldsymbol{h}})_{m\in J(j+1,k')}$. Nous allons en effet démontrer le lemme ci-dessous :

Lemme 4.3.14. *Pour tout $\theta \in [0,1]$, et pour tout $l \in \{1,...,r\}$ on a la majoration :*

$$\begin{aligned}
&\max_{\substack{(j_1,k_{j_1})\in\mathcal{C}_0\\ j_1\in\{1,...,l\}}}\Bigg\{\left(\prod_{m\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{m,j}}}\right)\\
&\qquad M_{(j_1,k_{j_1})}\Big(\alpha,(T_m\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})},\\
&\qquad\qquad (T_i^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big)\Bigg\}\\
&\qquad\qquad \ll \prod_{i=1}^{n+r}\left(\frac{P_j^{a_{m,1}}}{P^{a_{m,1}\theta}}\right)^{\prod_{j=1}^{r}t_{j,a_{m,j}}}\\
&\max_{\substack{(j_1,k_{j_1})\in\mathcal{C}_0\\ j_1\in\{1,...,l+1\}}}\Bigg\{\left(\prod_{m\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_m\prod_{j=1}^{l+1}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{m,j}}}\right)\\
&\qquad M_{(j_1,k_{j_1})}\Big(\alpha,(T_m\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})},\\
&\qquad\qquad (T_i^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big)\Bigg\}
\end{aligned}$$

Démonstration. Considérons un élément $(j_1,k_{j_1})\in\mathcal{C}_0$ tel que $j_1\in\{1,...,l\}$. Posons par ailleurs $k=\max_{i\in I_0}a_{i,l+1}$. Fixons dans un premier temps un ensemble de variables $\boldsymbol{y}=\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(j_1,k_{j_1})\\(l+1,k)}}=(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus(E(j_1,k_{j_1})\cup E(l+1,k))}$ vérifiant :

$$\forall (m,\boldsymbol{h})\in L\setminus(E(j_1,k_{j_1})\cup E(l+1,k)),\ \ |x_m^{\boldsymbol{h}}|\leqslant T_m\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta},$$

$$\forall (i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\cap E(l+1,k),\ \ ||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_1,k_{j_1})}(\widehat{\mathbf{X}}_{\substack{(j_1,k_{j_1})\\(l+1,k)}})||<T_i^{-1}\prod_{j=1}^{l}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta}.$$

On considère alors les variables $(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}$. Comme précédemment, on note pour $Z\geqslant 1$ et $\boldsymbol{b}=(b_{m,\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}$ et $\boldsymbol{c}=(c_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)}$ des familles de réels positifs :

$$\begin{aligned}
U_{\boldsymbol{y}}(Z)=\mathrm{Card}\{&(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}\mid\\
&\forall(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1}),\ |x_m^{\boldsymbol{h}}|\leqslant b_{m,\boldsymbol{h}}Z\\
&\text{et }\forall(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k),\\
&||\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_1,k_{j_1})}(\boldsymbol{y},(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})})||<c_{i,\boldsymbol{l}}^{-1}Z\}.
\end{aligned}$$

Choisissons alors Z_2, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ tels que

$$\begin{aligned}
b_{m,\boldsymbol{h}}Z_2 &= T_m \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta},\\
c_{i,\boldsymbol{l}}^{-1}Z_2 &= T_i^{-1} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
M_{(j_1,k_{j_1})} \quad &\Big(\alpha, (T_m \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})},\\
&(T_i^{-1} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big)\}\\
&\qquad\qquad\qquad \ll \sum_{\boldsymbol{y}} U_{\boldsymbol{y}}(Z_2).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

On choisit par ailleurs Z_1 tel que

$$\begin{aligned}
b_{m,\boldsymbol{h}}Z_1 &= T_m P_{l+1}^{-k} P^{k\theta} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta} = T_m \prod_{j=1}^{l+1} P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta},\\
c_{i,\boldsymbol{l}}^{-1}Z_1 &= T_i^{-1} P_{l+1}^{-k} P^{k\theta} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta},\\
c_{i,\boldsymbol{l}}Z_1 &= T_i \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-a_{i,j}} P^{a_{i,j}\theta}
\end{aligned}$$

Ces conditions sur $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, Z_2, Z_1$ sont satisfaites si et seulement si

$$\begin{aligned}
Z_1 &= P_{l+1}^{-\frac{k}{2}} P^{\frac{k\theta}{2}} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-\frac{d_j}{2}} P^{\frac{d_j}{2}\theta},\\
Z_2 &= Z_1 \frac{P_{l+1}^{k}}{P^{k\theta}} = P_{l+1}^{\frac{k}{2}} P^{-\frac{k\theta}{2}} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{-\frac{d_j}{2}} P^{\frac{d_j}{2}\theta}\\
b_{m,\boldsymbol{h}} &= T_m P_{l+1}^{-\frac{k}{2}} P^{\frac{k\theta}{2}} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{\frac{d_j}{2}-a_{m,j}} P^{-\frac{d_j}{2}\theta+a_{m,j}\theta},\\
c_{i,\boldsymbol{l}} &= T_i P_{l+1}^{\frac{k}{2}} P^{-\frac{k\theta}{2}} \textstyle\prod_{j=1}^{l} P_j^{\frac{d_j}{2}-a_{i,j}} P^{-\frac{d_j}{2}\theta+a_{i,j}\theta}.
\end{aligned}$$

On a alors $b_{m,\boldsymbol{h}}^{-1}Z_1 = T_m^{-1} \prod_{j=1}^{l} P_j^{a_{m,j}-d_j} P^{(d_j-a_{m,j})\theta}$.

Par ailleurs, en appliquant à nouveau le lemme 2.3.6,

$$\begin{aligned}
U_{\boldsymbol{y}}(Z_2) \ll \max\Bigg(&\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})} \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) U_{\boldsymbol{y}}(Z_1),\\
&\frac{\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})} b_{m,\boldsymbol{h}}Z_2}{\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)} c_{i,\boldsymbol{l}}Z_1} U_{\boldsymbol{y}}^{t}(Z_1)\Bigg),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

On observe que

$$\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)=\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)$$
$$=\prod_{m\in J(l+1,k)\setminus J(j_1,k_{j_1})}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}$$
$$\prod_{m\in J(l+1,k)\cap J(j_1,k_{j_1})}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{(t_{j_1,a_{m,j_1}}-1)\prod_{\substack{j\neq l+1\\ j\neq j_1}}t_{j,a_{m,j}}}$$
$$=\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}\prod_{m\in J(l+1,k)\cap J(j_1,k_{j_1})}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{-\prod_{\substack{j\neq l+1\\ j\neq j_1}}t_{j,a_{m,j}}}$$

et de même

$$\frac{\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}b_{m,\boldsymbol{h}}Z_2}{\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)}c_{i,\boldsymbol{l}}Z_1}=\frac{\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1})}T_m\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta}}{\prod_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)}T_i\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta}}$$
$$=\frac{\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_i\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{i,j}}}}$$
$$\frac{\prod_{m\in J(l+1,k)\cap J(j_1,k_{j_1})}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta}\right)^{-\prod_{\substack{j\neq j_1\\ j\neq l+1}}t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(l+1,k)\cap J(j_1,k_{j_1})}\left(T_i\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta}\right)^{-\prod_{\substack{j\neq j_1\\ j\neq l+1}}t_{j,a_{i,j}}}}$$
$$=\frac{\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_i\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{i,j}}}}.$$

Par ailleurs, on a que

$$U_{\boldsymbol{y}}^t(Z_1)=\mathrm{Card}\{(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)}\mid\forall(i,\boldsymbol{l}),\ |x_i^{\boldsymbol{l}}|\leqslant T_i\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta}$$
$$\text{et, }\forall(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1}),$$
$$||\alpha e_m(\gamma^{(j_1,k_{j_1})})^t_{(m,\boldsymbol{h})}(\boldsymbol{y},(x_i^{(\boldsymbol{l})})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k)})||\leqslant T_m^{-1}\prod_{j=1}^{l}P_j^{a_{m,j}-d_j}P^{(d_j-a_{m,j})\theta}\}.$$

On remarque que $(\gamma^{(j_1,k_{j_1})})^t_{(m,\boldsymbol{h})}=\gamma^{(l+1,k)}_{(m,\boldsymbol{h})}$. On a finalement, d'après les formules (4.26) et (4.27) :

$$\begin{aligned}
&M_{(j_1,k_{j_1})} \Big(\alpha, (T_m \textstyle\prod_{j=1}^l P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})}, \\
&\qquad (T_i^{-1} \textstyle\prod_{j=1}^l P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big)\} \\
&\ll \max\left(\prod_{m\in J(l+1,k)} \left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{\prod_{j\neq l+1} t_{j,a_{m,j}}} \prod_{\substack{m\in J(l+1,k)\\ \cap J(j_1,k_{j_1})}} \left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{-\prod_{\substack{j\neq l+1\\ j\neq j_1}} t_{j,a_{m,j}}} \sum_{\boldsymbol{y}} U_{\boldsymbol{y}}(Z_1), \right. \\
&\qquad \left. \frac{\prod_{m\in J(l+1,k)} \left(T_m \prod_{j=1}^l P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq l+1} t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{i\in J(j_1,k_{j_1})} \left(T_i \prod_{j=1}^l P_j^{-a_{i,j}} P^{a_{i,j}\theta}\right)^{\prod_{j\neq j_1} t_{j,a_{i,j}}}} \sum_{\boldsymbol{y}} U_{\boldsymbol{y}}^t(Z_1) \right).
\end{aligned}$$

Or, on observe que

$$\sum_{\boldsymbol{y}} U_{\boldsymbol{y}}(Z_1) = M_{(j_1,k_{j_1})} \left(\alpha, (A_{m,\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})}, (B_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\right)$$

où

$$A_{m,\boldsymbol{h}} = \begin{cases} T_m \prod_{j=1}^l P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta} & \text{si} \quad (m,\boldsymbol{h}) \in L \setminus (E(l+1,k)\cup E(j_1,k_{j_1})), \\ T_m \prod_{j=1}^{l+1} P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta} & \text{si} \qquad (m,\boldsymbol{h}) \in E(l+1,k)\setminus E(j_1,k_{j_1}) \end{cases},$$

$$B_{i,\boldsymbol{l}} = \begin{cases} T_i^{-1} P_{l+1}^{-k} P^{k\theta} \prod_{j=1}^l P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta} & \text{si} \quad (i,\boldsymbol{l}) \in E(j_1,k_{j_1})\setminus E(l+1,k), \\ T_i^{-1} \prod_{j=1}^l P_j^{a_{i,j}-d_j} P^{(d_j-a_{i,j})\theta} & \text{si} \quad (m,\boldsymbol{h}) \in E(l+1,k)\cap E(j_1,k_{j_1}) \end{cases}.$$

et

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\boldsymbol{y}} U_{\boldsymbol{y}}^t(Z_1) = M_{(l+1,k)} &\Big(\alpha, (T_i \textstyle\prod_{j=1}^l P_j^{-a_{i,j}} P^{a_{i,j}\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in L\setminus E(l+1,k)}, \\
&(T_m^{-1} \textstyle\prod_{j=1}^l P_j^{a_{m,j}-d_j} P^{(d_j-a_{m,j})\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)}\Big)\}
\end{aligned}$$

Or en employant les mêmes arguments que pour le lemme 4.3.12, on montre que :

$$\left(\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}\right)$$
$$M_{(l+1,k)}\quad\Big(\alpha,(T_i\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{i,j}}P^{a_{i,j}\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in L\setminus E(l+1,k)},$$
$$(T_m^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{a_{m,j}-d_j}P^{(d_j-a_{m,j})\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in E(l+1,k)}\Big)$$
$$\ll\left(\prod_{m\in I_0}(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}})^{\prod_{j=1}^{r}t_{j,a_{m,j}}}\right)\max_{K_1\in\mathcal{P}(l+1)}\{\left(\prod_{m\in J(l+1,K_1)}\left(T_m\prod_{j=1}^{l+1}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_1^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}\right)$$
$$M_{(l+1,K_1)}\quad\Big(\alpha,(T_m\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(l+1,k)},$$
$$(T_i^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(l+1,k)}\Big)\}.$$

En regroupant les résultats obtenus, on obtient donc

$$\prod_{m\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_m\prod_{j=1}^{l}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{m,j}}}$$
$$M_{(j_1,k_{j_1})}\quad\Big(\alpha,(T_m\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})},$$
$$(T_i^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big)\}$$
$$\ll\max\{A_1,A_2\}$$

$$A_1=\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}\prod_{\substack{m\in J(l+1,k)\\ \cap J(j_1,k_{j_1})}}\left(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}}\right)^{-\prod_{\substack{j\neq l+1\\ j\neq j_1}}t_{j,a_{m,j}}}$$
$$\prod_{m\in J(j_1,k_{j_1})}\left(T_m\prod_{j=1}^{l+1}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq j_1}t_{j,a_{m,j}}}\quad M_{(j_1,k_{j_1})}\quad\Big(\alpha,(A_{m,\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_1,k_{j_1})},\ (B_{i,\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_1,k_{j_1})}\Big),$$

$$A_2=\left(\prod_{m\in I_0}(\frac{P_{l+1}^{a_{m,l+1}}}{P^{a_{m,l+1}\theta}})^{\prod_{j=1}^{r}t_{j,a_{m,j}}}\right)\max_{K_1\in\mathcal{P}(l+1)}\{\prod_{m\in J(l+1,k)}\left(T_m\prod_{j=1}^{l+1}\frac{P^{a_{m,j}\theta}}{P_j^{a_{m,j}}}\right)^{\prod_{j\neq l+1}t_{j,a_{m,j}}}$$
$$M_{(l+1,K_1)}\quad\Big(\alpha,(T_m\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{-a_{m,j}}P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(l+1,k)},$$
$$(T_i^{-1}\textstyle\prod_{j=1}^{l+1}P_j^{a_{i,j}-d_j}P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(l+1,k)}\Big)\}.\ .$$

Le terme A_2 est du type de ceux intervenant à droite de l'inégalité du lemme. Il nous reste donc à réduire les bornes intervenant dans A_1. Pour cela, il suffit d'appliquer exactement le même procédé que celui que nous avons développé pour toutes les familles de variables $(x_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L(j_1,k_{j_1},h)}$ pour tous $h \in \{1,...,t_{j_1,k_{j_1}}-2\}$ puis pour les familles $(x_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L(j_1,k',h)}$ pour tout poids $k' \in \mathcal{P}(j_1) \setminus \{k_{j_1}\}$. À terme, on obtient bien l'inégalité souhaitée. $\square$

En utilisant les lemmes 4.3.13 et 4.3.14, on obtient directement, par récurrence, la majoration :

$$\left(\prod_{i\in J(1,K)} T_i^{\prod_{j=2}^r t_{j,a_{i,j}}}\right) M_{(1,K)}\left(\alpha, (T_m)_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(1,K)}, (T_i^{-1})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(1,K)}\right)$$

$$\ll \prod_{i\in I_0}\left(\frac{\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}{\prod_{j=1}^r P^{a_{i,j}\theta}}\right)^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}} \max_{(j_0,K_{j_0})\in\mathcal{C}_0} \frac{\prod_{m\in J(j_0,K_{j_0})} T_m^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{m,j}}}}{\prod_{m\in J(j_0,K_{j_0})}(\prod_{j=1}^r P_j^{a_{m,j}} P^{-a_{m,j}\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{m,j}}}}$$

$$M_{(j_0,K_{j_0})}\left(\alpha, (T_m \prod_{j=1}^r P_j^{-a_{m,j}} P^{a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})},\right.$$

$$\left.(T_i^{-1}\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j+a_{i,j}} P^{(d_j-a_{i,j})\theta})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0})}\right).$$

En rappelant que $T_i = \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}$, on remarque que le membre de droite de la majoration ci-dessus peut se réécrire :

$$\prod_{i\in I_0}\left(\frac{e_iT_i}{\prod_{j=1}^r P^{a_{i,j}\theta}}\right)^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}} \max_{(j_0,K_{j_0})\in\mathcal{C}_0} \prod_{m\in J(j_0,K_{j_0})} (e_m^{-1}P^{(\sum_{j=1}^r a_{m,j})\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{m,j}}}$$

$$M_{(j_0,K_{j_0})}\left(\alpha, (\frac{1}{e_m}P^{\sum_{j=1}^r a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})},\right.$$

$$\left.(e_iP^{\sum_{j=1}^r (d_j-a_{i,j})\theta}\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0})}\right).$$

Nous en déduisons alors une nouvelle version du lemme 4.3.15 :

Lemme 4.3.15. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit on a*

$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{j=1}^{r} P_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{(1+\varepsilon)} \left(\prod_{i\in I_0} e_i^{\frac{\prod_{j=1}^{r} t_{j,a_{i,j}}}{2^{D_1+D_2+\ldots+D_r}}}\right)$$

$$\times \prod_{i\in I_0}\left(P^{\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}\theta}\right)^{-\frac{\prod_{j=1}^{r} t_{j,a_{i,j}}}{2^{D_1+D_2+\ldots+D_r}}} \max_{(j_0,K_{j_0})\in\mathcal{C}_0} \prod_{m\in J(j_0,K_{j_0})} (e_m^{-1}P^{(\sum_{j=1}^{r} a_{m,j})\theta})^{\frac{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{m,j}}}{2^{D_1+D_2+\ldots+D_r}}}$$

$$M_{(j_0,K_{j_0})}\Bigg(\alpha, (\frac{1}{e_m}P^{\sum_{j=1}^{r} a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})},$$

$$(e_iP^{\sum_{j=1}^{r}(d_j-a_{i,j})\theta}\prod_{j=1}^{r} P_j^{-d_j})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0})}\Bigg)^{2^{-(D_1+D_2+\ldots+D_r)}}.,$$

On déduit de ce lemme le résultat ci-dessous

Lemme 4.3.16. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et tous $\kappa > 0,\ P \geqslant 1$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. $$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i\in I_0} e_i^{\frac{\prod_{j=1}^{r} t_{j,a_{i,j}}}{2^{\sum_{j=1}^{r} D_j}}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r} P_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{(1+\varepsilon)} P^{-\kappa},$$

2. *Il existe un certain $j_0 \in \{1, ..., r\}$ et $K_{j_0} \in \{1, ..., d_{j_0}\}$ tel que $J(j_0, K_{j_0}) \neq \emptyset$*

$$M_{(j_0,K_{j_0})}\Bigg(\alpha, (\frac{1}{e_m}P^{\sum_{j=1}^{r} a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})},$$

$$(e_iP^{\sum_{j=1}^{r}(d_j-a_{i,j})\theta}\prod_{j=1}^{r} P_j^{-d_j})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0})}\Bigg)$$

$$\gg \left(\prod_{i\in I_0}(P^{(\sum_{j=1}^{r} a_{i,j})\theta})^{\prod_{j=1}^{r} t_{j,a_{i,j}}}\right)\left(\prod_{i\in J(j_0,K_{j_0})}(P^{\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}}\right)^{-1} P^{2^{-\sum_{j=1}^{r} D_j}\kappa}.$$

Remarque 4.3.17. *Si κ est petit, la condition* 1 *donne une majoration de $|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)|$ plus grande que la majoration triviale,*

$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j},$$

c'est pourquoi nous utiliserons uniquement cette majoration pour $P^\kappa > \prod_{j=1}^{r} P_j^{d_j}$.

Supposons à présent qu'il existe $(j_0, K_{j_0}) \in \mathcal{C}_0$ et

$$(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E((j_0,K_{j_0})} \in \mathcal{M}_{(j_0,K_{j_0})}\left(\alpha, (\frac{1}{e_m}P^{\sum_{j=1}^r a_{m,j}\theta})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})},\right.$$
$$\left.(e_i P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i,j})\theta}\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j})_{(i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0})}\right)$$

tel qu'il existe $(i_0, \boldsymbol{l}_0) \in E(j_0, K_{j_0})$ tel que

$$\gamma_{(i,\boldsymbol{l}_0)}^{(j_0,K_{j_0})}(x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})} \neq 0.$$

On pose $q = |\gamma_{(i,\boldsymbol{l}_0)}^{(j_0,K_{j_0})}((x_m^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})})|$, on a alors

$$||\alpha e_{i_0} q|| < e_{i_0} P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i_0,j})\theta}\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j}$$

et de plus,

$$q \ll P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i_0,j})\theta},$$

(quitte à modifier θ, pour P grand on pourra supposer $q \leqslant P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i_0,j})\theta}$). On en déduit :

Lemme 4.3.18. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et tous $\kappa > 0$, $P \geqslant 1$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.
$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i\in I_0} e_i^{\frac{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}{2^{\sum_{j=1}^r D_j}}}\right)\left(\prod_{j=1}^r P_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n+r} T_i\right)^{(1+\varepsilon)} P^{-\kappa},$$

2. *Il existe $i \in I_0$ et des entiers a, q tels que $q \leqslant P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i,j})\theta}$, $a < e_i q$ et*
$$|\alpha e_i q - a| \leqslant e_i \prod_{j=1}^r P_j^{-d_j} P^{\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i,j})\theta}.$$

3. *Il existe un certain $(j_0, K_{j_0}) \in \mathcal{C}_0\}$ tel que*
$$\mathrm{Card}\{(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})} \mid |x_m^{(\boldsymbol{h})}| \leqslant \frac{1}{e_m}P^{\sum_{j=1}^r a_{m,j}\theta},$$
$$\forall (i,\boldsymbol{l}) \in E(j_0,K_{j_0}),\ \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_0,K_{j_0})}(x_m^{(\boldsymbol{h})}) = 0\}$$
$$\gg \left(\prod_{i\in I_0}(P^{(\sum_{j=1}^r a_{i,j})\theta})^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}\right)\left(\prod_{i\in J(j_0,K_{j_0})}(P^{\sum_{j=1}^r a_{i,j}\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}}\right)^{-1} P^{2^{-\sum_{j=1}^r D_j}\kappa}.$$

Supposons à présent que nous sommes dans le cas 3, et remarquons que le cardinal considéré peut être majoré trivialement par

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\{(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})} \mid |x_m^{(\boldsymbol{h})}| \leqslant P^{\sum_{j=1}^r a_{m,j}\theta},\\ \forall (i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0}),\ \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_0,K_{j_0})}(x_m^{(\boldsymbol{h})})=0\},\end{aligned}$$

qui peut être majoré, en appliquant le lemme 3.3.11 par :

$$\begin{aligned}&A_{(j_0,K_{j_0})}(P^\theta)\prod_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})} P^{((\sum_{j=1}^r a_{m,j})-1)\theta}\\ &\quad = A_{(j_0,K_{j_0})}(P^\theta)\left(\prod_{i\in I_0}(P^{((\sum_{j=1}^r a_{i,j})-1)\theta})^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}\right)\\ &\qquad\qquad \left(\prod_{i\in J(j_0,K_{j_0})}(P^{((\sum_{j=1}^r a_{i,j})-1)\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}}\right)^{-1}\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}A_{(j_0,K_{j_0})}(P^\theta) = \mathrm{Card}\Big\{(x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})} \mid |x_m^{(\boldsymbol{h})}|\leqslant P^\theta,\\ \forall (i,\boldsymbol{l})\in E(j_0,K_{j_0}),\ \gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_0,K_{j_0})}(\frac{1}{e_m}x_m^{(\boldsymbol{h})})=0\Big\}.\end{aligned}$$

Ainsi, la condition 3 implique

(4.28)
$$A_{(j_0,K_{j_0})}(P^\theta) \gg P^{\theta(\sum_{i\in I_0}\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}} - \sum_{i\in J(j_0,K_{j_0})}\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}) - 2^{\sum_{j=1}^r D_j}\kappa}.$$

On considère $\mathcal{L}$ le sous-espace de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n(j_0,K_{j_0})}$ où

$$n(j_0,K_{j_0}) = \mathrm{Card}(L\setminus E(j_0,K_{j_0})) = \sum_{i\in I_0}\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}} - \sum_{i\in J(j_0,K_{j_0})}\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$$

défini par les $\mathrm{Card}(E(j_0,K_{j_0})) = \sum_{i\in J(j_0,K_{j_0})}\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$ équations

$$\gamma_{(i,\boldsymbol{l})}^{(j_0,K_{j_0})}((\frac{1}{e_m}x_m^{(\boldsymbol{h})})_{(m,\boldsymbol{h})\in L\setminus E(j_0,K_{j_0})}) = 0.$$

D'après la démonstation de [Br, Théorème 3.1], la majoration (4.28) implique (en posant $\kappa = K\theta$) :

(4.29)
$$\dim\mathcal{L} \geqslant n(j_0,K_{j_0}) - 2^{\sum_{j=1}^r D_j}K.$$

Considérons à présent la sous-variété $\mathcal{D}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n(j_0,K_{j_0})}$ définie par les $\sum_{i\in I_0}(\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}} - 1) - \sum_{i\in J(j_0,K_{j_0})}\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$ équations

$$\forall (m,\boldsymbol{h}) \in L\setminus E(j_0,K_{j_0}) \;\; x_m^{(\boldsymbol{h})} = x_m^{(1,\dots,1)}.$$

Nous avons alors, d'après (4.29) :

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{D}\cap\mathcal{L} &\geqslant \dim\mathcal{L} - \sum_{i\in I_0}(\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}} - 1) + \sum_{i\in J(j_0,K_{j_0})}\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}} \\ &\geqslant \operatorname{Card} I_0 - 2^{\sum_{j=1}^r D_j}K.\end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$ est isomorphe à la variété :

$$\{(x_m)_{m\in I_0} \mid \forall i\in J(j_0,K_{j_0}),\; \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}}}{\partial x_i}((x_m)_{m\in I_0}) = 0\}$$

(en effet, par construction, si $x_m^{(\boldsymbol{h})} = x_m^{(1,\dots,1)} = x_m$ pour tous $\boldsymbol{h}, m$, on a pour tout $i,\boldsymbol{l}$, $\gamma_{i,\boldsymbol{l}}^{(j_0,K_{j_0})}(\frac{1}{e_m}x_m^{(\boldsymbol{h})}) = N\frac{\partial F_{\boldsymbol{t}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ pour un certain entier N). En notant

$$V_{\boldsymbol{t},(j_0,K_{j_0})}^* = \{\boldsymbol{x}\in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+r} \mid \forall i\in J(j_0,K_{j_0}),\; \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\},$$

l'inégalité ci-dessus implique alors :

$$\dim V_{\boldsymbol{t},(j_0,K_{j_0})}^* \geqslant n+r-2^{\sum_{j=1}^r D_j}K.$$

Par conséquent, nous fixerons dorénavant

$$K = (n+r-\dim V_{\boldsymbol{t},(j_0,K_{j_0})}^* + \varepsilon)/2^{\sum_{j=1}^r D_j}, \tag{4.30}$$

de sorte que la condition 3 n'est plus possible.

Dans tout ce qui va suivre nous choisirons $P = \prod_{j=1}^r P_j^{d_j}$ et nous noterons $\tilde{d} = (\sum_{j=1}^r d_j) - 1$. Remarquons que pour tout i, $\sum_{j=1}^r (d_j - a_{i,j}) \leqslant \tilde{d}$. Définissons, pour tout $i\in I_0$, la famille d'arcs majeurs

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(i)}(\theta) = \{\alpha\in[0,1[\mid 2|\alpha e_i q - a| < e_i P^{-1+\tilde{d}\theta}\} \tag{4.31}$$

et posons

$$\mathfrak{M}^{(i)}(\theta) = \bigcup_{0<q\leqslant P^{\tilde{d}\theta}}\;\bigcup_{0\leqslant a<e_i q}\mathfrak{M}_{a,q}^{(i)}(\theta), \tag{4.32}$$

$$\mathfrak{M}(\theta) = \bigcup_{i\in I_0}\mathfrak{M}^{(i)}(\theta), \quad \mathfrak{m}(\theta) = [0,1[\setminus\mathfrak{M}(\theta). \tag{4.33}$$

Avec ces notations, à partir du lemme 4.3.18 et en remarquant que pour tout $i \in I_0$, $\frac{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}{2^{\sum_{j=1}^r D_j}} \leqslant \frac{1}{2^r}$ et que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+r} T_i &= \prod_{i=1}^{n+r}\left(\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{\sum_{i=1}^{n+r} a_{i,j}}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right),
\end{aligned}$$

nous obtenons la proposition 4.3.9.

4.3.4 Méthode du cercle

Les arcs mineurs

Posons, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $P_j = P_r^{b_j}$. On considère un réel $\delta > 0$ arbitrairement petit, et on suppose que $\theta \in [0, 1]$ et K vérifient :

$$K - 2\tilde{d} > \left(2\delta + \frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j}\right)\theta^{-1}, \tag{4.34}$$

$$K > (2\delta + 1)(\sum_{j=1}^{r} b_j d_j), \tag{4.35}$$

$$1 > (\sum_{j=1}^{r} b_j d_j)(5\tilde{d}\theta + \delta). \tag{4.36}$$

Remarque 4.3.19. *Les conditions* (4.34) *et* (4.36) *impliquent en particulier que* $K > (5\sum_{j=1}^r b_j + 2)\tilde{d}$*, ce que nous supposerons dorénavant.*

Lemme 4.3.20. *On a la majoration :*

$$\int_{\mathfrak{m}(\theta)} |S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| d\alpha \ll e_0 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P^{-1-\delta}.$$

Démonstration. On considère une suite $(\theta_i)_{i \in \{0,\dots,T\}}$ telle que

$$\theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_T,$$

$$\theta_T \leqslant \frac{1}{\sum_{j=1}^r b_j d_j}, \quad K\theta_T > 2\delta + 1 + \frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j}, \tag{4.37}$$

$$\forall i \in \{0, ..., T-1\}, \quad 2\tilde{d}(\theta_{i+1} - \theta_i) < \delta/2. \tag{4.38}$$

On suppose de plus que T est tel que $T \ll P^{\frac{\delta}{2}}$. D'après la proposition 4.3.9,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_T)} |S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| d\alpha &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta_T + \varepsilon} \\ &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P^{-1-\delta}\end{aligned}$$

(d'après la condition (4.37)). Remarquons par ailleurs que pour tout θ et tout $i \in I_0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{(i)}(\theta)) &\ll \sum_{0 < q \leqslant P^{\tilde{d}\theta}} \sum_{0 \leqslant a < e_i q} \frac{1}{q} P^{-1+\tilde{d}\theta} \\ &\ll e_0 P^{-1+2\tilde{d}\theta}.\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $t \in \{0, ..., T-1\}$, en utilisant la condition (4.34) :

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha in \mathfrak{M}(\theta_{t+1}) \setminus \mathfrak{M}(\theta_t)} |S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| d\alpha \\ &\quad \ll e_0 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta_t + 2\tilde{d}\theta_{t+1} - 1 + \varepsilon} \\ &\ll e_0 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - (K - 2\tilde{d})\theta_t - 1 + 2\tilde{d}(\theta_{t+1} - \theta_t) + \varepsilon} \\ &\quad \ll e_0 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P^{-1-\frac{3}{2}\delta},\end{aligned}$$

et on obtient le résultat souhaité en sommant sur tous les $t \in \{0, ..., T-1\}$. $\square$

Les arcs majeurs

Posons

$$e_0 = \max_{i \in I_0} e_i, \tag{4.39}$$

et introduisons à présent la nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) = \{\alpha \in [0,1[\mid 2|\alpha q - a| < qP^{-1+\tilde{d}\theta}\} \tag{4.40}$$

et posons

$$\mathfrak{M}'(\theta) = \bigcup_{0<q\leqslant e_0P^{\tilde{d}\theta}} \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta), \tag{4.41}$$

On remarque que, pour tout $i \in I_0$,

$$\mathfrak{M}^{(i)}(\theta) \subset \mathfrak{M}'(\theta).$$

En effet, si $\alpha \in \mathfrak{M}^{(i)}_{a,q}(\theta)$, alors

$$2|\alpha q e_i - a| \leqslant e_i P^{-1+\tilde{d}\theta}$$

et donc en posant $q' = (qe_i)/\operatorname{pgcd}(qe_i, a)$ et $a' = a/\operatorname{pgcd}(qe_i, a)$, on trouve

$$2|\alpha q' - a'| \leqslant \frac{e_i}{\mathrm{pgcd}(qe_i, a)} P^{-1+\tilde{d}\theta} \leqslant q'P^{-1+\tilde{d}\theta}$$

et on a de plus $q' \leqslant e_0 P^{\tilde{d}\theta}$, $0 \leqslant a' < q'$ et $\mathrm{pgcd}(a', q') = 1$, donc $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$. Les arcs majeurs $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$ vérifient par ailleurs le lemme ci-dessous :

Lemme 4.3.21. *Pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$ tel que $e_0^2 < P^{1-3\tilde{d}\theta}$, les intervalles $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta) \cap \mathfrak{M}'_{a',q'}(\theta)$ avec $q, q' \leqslant e_0 P^{\tilde{d}\theta}$, $0 \leqslant a < q$, $0 \leqslant a' < q'$, $\mathrm{pgcd}(a, q) = 1$, $\mathrm{pgcd}(a', q') = 1$ et $(a, q) \neq (a', q')$. On a alors

$$\frac{1}{qq'} \leqslant \frac{|aq' - a'q|}{qq'} = \left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{a'}{q'}\right| \leqslant P^{-1+\tilde{d}\theta}$$

et donc

$$1 \leqslant qq'P^{-1+\tilde{d}\theta} < e_0^2 P^{-1+3\tilde{d}\theta}$$

d'où le résultat. □

En combinant les résultats des lemmes 4.3.20 et 4.3.21, on obtient l'estimation :

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = \sum_{1\leqslant q\leqslant e_0P^{\tilde{d}\theta}} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)} S_{\boldsymbol{e}}(\alpha) d\alpha + O\left(e_0 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right)\right) \tag{4.42}$$

Étant donné un élément $\alpha \in \mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$, nous poserons $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ avec $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}P^{-1+\tilde{d}\theta}$, et nous noterons :

$$S_{a,q,\boldsymbol{e}} = \sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right), \tag{4.43}$$

$$I(\beta) = \int_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n+r} \\ \forall i,\ |u_i|\leqslant|\boldsymbol{u}^{E(i)}| \\ \forall j\in\{1,\dots,r\},\ |\boldsymbol{u}^{E(n+j)}|\leqslant 1}} e\left(\beta F(\boldsymbol{u})\right) d\boldsymbol{u}. \tag{4.44}$$

On établit alors le résultat suivant :

Lemme 4.3.22. *Si α appartient à $\mathfrak{M}'_{a,q}(\theta)$, on a alors :*

$$S_{\boldsymbol{e}}(\alpha) = \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} q^{-(n+r)} S_{a,q,\boldsymbol{e}} I(P\beta)\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) + O\left(e_0\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) q P_r^{-1} P^{\tilde{d}\theta}\right).$$

Démonstration. Remarquons avant tout que lorsque $e_0 q > P_r$, l'égalité du lemme est triviale car le terme d'erreur est alors dominant. En effet on a dans ce cas :

$$\begin{aligned}
|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| &\ll \prod_{i=1}^{n+r}\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) \\
&\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-1} e_0 P^{\tilde{d}\theta} q
\end{aligned}$$

et en utilisant les estimations triviales $|S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \ll q^{n+r}$ et $|I(P\beta)| \ll 1$:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} q^{-(n+r)}|S_{a,q,\boldsymbol{e}}||I(P\beta)|\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) \\
&\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-1} q e_0 P^{\tilde{d}\theta}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat. Nous supposerons donc $e_0 q \leqslant P_r$.

Remarquons à présent que, d'après (4.4) :

(4.45)

$$S_{\boldsymbol{e}}(\alpha) = \sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right) \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{b}(q) \\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor \leqslant P_j \\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r(\left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1)^{a_{i,j}}}} e(\beta F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}))$$

$$= \sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right)\tilde{S}(\boldsymbol{b}) + O\left(e_0\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j}\right)P_r^{-1}\right)$$

où

$$\tilde{S}(\boldsymbol{b}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{b}(q) \\ |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\leqslant P_j \\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r(|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|+1)^{a_{i,j}}}} e(\beta F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})).$$

Soient $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{x}''$ deux élément de $\mathbf{R}^{n+r}$ tels que

$$|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''| \leqslant 2$$

et, pour tout i,

$$\begin{aligned} |qx_i'+b_i| &\leqslant \tfrac{1}{e_i}\textstyle\prod_{j=1}^r(|(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}))^{E(n+j)}|+1)^{a_{i,j}}, \\ |qx_i''+b_i| &\leqslant \tfrac{1}{e_i}\textstyle\prod_{j=1}^r(|(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}))^{E(n+j)}|+1)^{a_{i,j}}, \end{aligned}$$

$$\forall j\in\{1,...,r\},\quad |(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}))^{E(n+j)}|\leqslant P_j,\quad |(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}))^{E(n+j)}|\leqslant P_j.$$

On observe alors que

$$\left|F(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}))-F(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}))\right| \ll qe_0P_1^{d_1}...P_{r-1}^{d_{r-1}}P_r^{d_r-1}.$$

Par conséquent,

$$\tilde{S}(\boldsymbol{b}) = \int_{\substack{q\tilde{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{R}^{n+r} \\ |qe_i\tilde{u}_i|\leqslant|\prod_{j=1}^r(\boldsymbol{e}.(q\tilde{\boldsymbol{u}}))^{a_{i,j}E(n+j)}| \\ |(\boldsymbol{e}.(q\tilde{\boldsymbol{u}}))^{E(n+j)}|\leqslant P_j}} e(\beta F(\boldsymbol{e}.(q\tilde{\boldsymbol{u}})))d\tilde{\boldsymbol{u}}$$

$$+ O\left(\underbrace{|\beta|}_{\leqslant P^{-1+\tilde{d}\theta}}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}q^{-(n+r)}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{d_j}\right)P_r^{-1}qe_0\right)$$

$$+ O\left(e_0\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j}\right)q^{-(n+r)+1}P_r^{-1}\right)$$

(le deuxième terme d'erreur correspondant aux points rencontrant le bord du domaine de sommation).

En effectuant le changement de variables

$$\forall i \in \{1,...,n+r\}, \quad q\tilde{u}_i = e_i^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}\right) u_i,$$

on trouve alors

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\boldsymbol{b}) = q^{-(n+r)}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right)\int_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n+r} \\ |\tilde{u}_i|\leqslant|\boldsymbol{u}^{E(i)}| \\ |\boldsymbol{u}^{E(n+j)}|\leqslant 1}} e(\beta F(\boldsymbol{u}))d\tilde{\boldsymbol{u}} \\ + O\left(e_0 q^{-(n+r)}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) q P_r^{-1} P^{\tilde{d}\theta}\right) \\ + O\left(e_0\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) q^{-(n+r)+1} P_r^{-1}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{S}(\boldsymbol{b})$ par cette expression dans (4.45), nous obtenons l'égalité du lemme. □

Posons à présent

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(Q) = \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-(n+r)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,\boldsymbol{e}}, \tag{4.46}$$

$$J_\sigma(\phi) = \int_{|\beta|\leqslant\phi} I(\beta)d\beta. \tag{4.47}$$

où σ désigne le cône maximal considéré auquel la fonction $h_{\boldsymbol{e},V}$ est associée (cf. section 2.2). Avec ces notations, en utilisant le lemme précédent dans la formule (4.42), et en remarquant que :

$$\int_{|\beta|\leqslant\frac{1}{2}P^{-1+\tilde{d}\theta}} I(P\beta)d\beta = P^{-1}\int_{|\beta|\leqslant\frac{1}{2}P^{\tilde{d}\theta}} I(\beta)d\beta = P^{-1}J\left(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}\theta}\right),$$

on trouve :

$$\begin{aligned}N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(e_0P^{\tilde{d}\theta})J_\sigma(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}\theta})\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right) \\ + O\left(e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P_r^{-1}P^{2\tilde{d}\theta}\,\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta))\right) \\ + O\left(e_0\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j-\delta}\right)\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta)) \ll \sum_{1\leqslant q\leqslant e_0 P^{\tilde{d}\theta}} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} P^{-1+\tilde{d}\theta} \ll e_0^2 P^{-1+3\tilde{d}\theta}.$$

On a donc :

$$e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-1} P^{2\tilde{d}\theta}\, \mathrm{Vol}(\mathfrak{M}'(\theta)) \\ \ll e_0^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-1} P^{5\tilde{d}\theta}.$$

En remarquant que $P_r^{-1}P^{5\tilde{d}\theta} \ll P^{-\delta}$ d'après (4.36), on conclut que :

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) = \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(e_0 P^{\tilde{d}\theta}) J_\sigma(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}\theta}) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) \\ + O\left(e_0^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right)\right). \tag{4.48}$$

Notons à présent :

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(n+r)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,\boldsymbol{e}}, \tag{4.49}$$

$$J_\sigma = \int_{\mathbf{R}} I(\beta) d\beta. \tag{4.50}$$

Nous allons chercher à remplacer $\mathfrak{S}(e_0 P^{\tilde{d}\theta})$ par $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}$ et $J_\sigma(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}\theta})$ par J_σ dans (4.48). Pour cela nous utiliserons le lemme ci-dessous :

Lemme 4.3.23. *Pour tous $a, q, \boldsymbol{e}$, on a l'estimation suivante :*

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{ e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}} \right\} q^{n+r-2-\delta}.$$

Démonstration. Considérons $\alpha = \frac{a}{q}$ pour un certain et soit $\theta_0 \in [0,1]$ vérifiant les conditions (4.34), (4.35), (4.36), et $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$. On choisit par ailleurs P tel que $q = e_0 P^{\tilde{d}\theta_0}$. On suppose de plus que P et θ_0 vérifient l'hypothèse $e_0^2 < P^{1-2\tilde{d}\theta_0}$ (si ce n'est pas le cas la majoration du lemme devient triviale car alors $e_0^2 > q$ et donc $e_0^{4+\delta} q^{n+r-2-\delta} > q^{n+r}$). On pose par ailleurs $\theta_0' = \theta_0 - \nu$, pour $\nu > 0$ fixé arbitrairement petit. On a alors que $\alpha \notin \mathfrak{M}(\theta_0')$. En effet supposons qu'il existe (a', q') tels que $q' \leqslant P^{\tilde{d}\theta_0'} < q$, $0 \leqslant a' < q'$ et $\alpha \in \mathfrak{M}^{(i)}_{a',q'}(\theta_0')$. Remarquons que si l'on a $aq'e_i = qa'$, alors, puisque $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$, $a' = au$ avec $a \neq 0$ (sinon on a $q = 1$ ce qui contredit $0 < q' < q$) et donc $0 < q'e_i = qu$ donc $q'e_i \geqslant q$, ce qui est absurde puisque $e_i q' < q$. On a donc $aq'e_i \neq qa'$ et ainsi :

$$1 \leqslant |aq'e_i - qa'| = q|\alpha e_i q' - a'| < qe_i P^{-1+\tilde{d}\theta_0} \leqslant e_0^2 P^{-1+2\tilde{d}\theta_0} < 1$$

ce qui est absurde.

Par conséquent, d'après la proposition 4.3.9 :

$$|S_{\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta_0 + \varepsilon}.$$

Le lemme 4.3.22 donne donc :

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) &(q^{-(n+r)} S_{a,q,\boldsymbol{e}} I(0) + O(e_0 q P_r^{-1} P^{\tilde{d}\theta_0})) \\ &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^r}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta_0 + \varepsilon}\end{aligned}$$

donc (puisque $I(0) \asymp 1$) :

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \ll e_0 q^{n+r+1} P_r^{-1} P^{\tilde{d}\theta_0} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}} q^{n+r} P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta_0 + \varepsilon}.$$

Or on a d'une part

$$e_0 q^{n+r+1} P_r^{-1} P^{\tilde{d}\theta_0} \ll e_0^{4+\delta} q^{n+r+1} q^{-(3+\delta)}$$

(car $P_r^{-1} < P^{-4\tilde{d}\theta_0}$, par la condition (4.36)), et d'autre part

$$K\theta_0 \geqslant \frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} + 2\tilde{\theta}_0 + \delta$$

(d'après la condition (4.34)), et on obtient donc

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{ e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}} \right\} q^{n+r-2-\delta}.$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.24. *La série $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}$ est absolument convergente et on a de plus*

$$|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(Q)-\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} Q^{-\delta}$$

pour tout $Q > e_0$.

Démonstration. Nous avons montré précédemment que

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} q^{n+r-2-\delta}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(Q)-\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}| &\ll \sum_{q>Q} q^{-(n+r)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q,\boldsymbol{e}}| \\
&\ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} \sum_{q>Q} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} q^{-2-\delta} \\
&\ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} Q^{-\delta}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.25. *L'intégrale J_σ est absolument convergente et on a de plus*

$$|J_\sigma(\phi)-J_\sigma| \ll \phi^{-1}$$

pour tout ϕ assez grand.

Démonstration. On considère $\beta \in \mathbf{R}$ fixé quelconque et on choisit $\theta' \in [0,1]$ vérifiant les conditions (4.34), (4.35), (4.36). On prend P tel que $2|\beta| = P^{\tilde{d}\theta'}$. On choisit par ailleurs $e_1 = e_2 = \ldots = e_{n+r} = 1$ (et donc $e_0 = 1$). On a alors que $P^{-1}\beta \in \mathfrak{M}_{0,1}(\theta')$ et donc d'après le lemme 4.3.22 appliqué à $a = 0$ et $q = 1$:

$$S_{\boldsymbol{e}}(P^{-1}\beta) = \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) I(\beta) + O\left(\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-1} P^{2\tilde{d}\theta'}\right).$$

D'autre part, puisque les $\mathfrak{M}_{a,q}(\theta')$ sont disjoints, d'après la proposition 4.3.9, on a :

$$|S_{\boldsymbol{e}}(P^{-1}\beta)| \ll \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta' + \varepsilon}.$$

On trouve donc (en utilisant les conditions (4.34) et (4.36)) :

$$\begin{aligned} I(\beta) &\ll P^{2\tilde{d}\theta'} P_r^{-1} + P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta' + \varepsilon} \\ &\ll P^{2\tilde{d}\theta' - \frac{1}{\sum_{j=1}^r b_j d_j}} + P^{\frac{\sum_{j=1}^r b_j}{\sum_{j=1}^r b_j d_j} - K\theta' + \varepsilon} \\ &\ll P^{-3\tilde{d}\theta' - \delta} + P^{-2\tilde{d}\theta'} \ll |\beta|^{-2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|J_\sigma(\phi) - J_\sigma| \ll \int_{|\beta|>\phi} |I(\beta)| d\beta \ll \phi^{-1}.$$

□

Ces deux derniers lemmes permettent finalement d'établir la formule ci-dessous valable lorsque $e_0^2 < P^{1-3\tilde{d}\theta}$ et $K > \max\{(5\sum_{j=1}^r b_j + 2)\tilde{d}, (2\delta + 1)\sum_{j=1}^r b_j d_j\}$:

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) &= C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j}\right) \\ &+ O\left(\max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j - \delta}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.51}$$

où l'on a noté

$$C_{\sigma,\boldsymbol{e}} = \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} J_\sigma \tag{4.52}$$

Remarque 4.3.26. *D'après le lemme 4.3.24, on a*

$$|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(e_0) - \mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\}$$

donc en utilisant la majoration triviale $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}(e_0) \ll e_0^2$, *on en déduit* $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\}$. *On a donc*

$$|C_{\sigma,\boldsymbol{e}}| \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}.$$

Remarquons à présent que, pour un choix approprié de θ, on peut retirer la condition $e_0^2 < P^{1-3\tilde{d}\theta}$. En effet, supposons dans un premier temps que $e_0 > P^{\frac{1}{4}}$. On a l'estimation triviale :

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) &\leqslant \prod_{i=1}^{n+r} \frac{1}{e_i} \prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) \\ &\ll e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right), \end{aligned}$$

et par ailleurs, par la remarque ci-dessus

$$C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) \ll \max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right),$$

(quitte à prendre $\delta > 0$ plus petit). La formule (4.51) est donc trivialement vérifiée lorsque $e_0 > P^{\frac{1}{4}}$. Si l'on suppose que $e_0 \leqslant P^{\frac{1}{4}}$ la condition $e_0^2 < P^{1-3\tilde{d}\theta}$ est vérifiée lorsque $1 < P^{\frac{1}{2}-3\tilde{d}\theta}$ et donc lorsque $\theta < \frac{1}{6\tilde{d}}$, ce que l'on peut supposer. En observant que, puisque $r \geqslant 2$,

$$\max\left\{e_0^{4+\delta}, e_0^2 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2^r}}\right\} \ll e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}},$$

on obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 4.3.27. *Si l'on suppose $P_1 \geqslant P_2 \geqslant ... \geqslant P_r$, si $P_j = P_r^{b_j}$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$ et si de plus $K > \max\{(5\sum_{j=1}^{r} b_j + 2)\tilde{d}, (2\delta + 1)\sum_{j=1}^{r} b_j d_j\}$, alors*

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}} &\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) \\ &+ O\left(\left(e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right)\right). \end{aligned}$$

4.4 Deuxième étape

Dans cette partie, nous supposerons encore que $P_1 \geqslant P_2 \geqslant ... \geqslant P_r$. L'objectif de cette section est de donner, pour $m \in \{1, ..., r-1\}$ et $\boldsymbol{k} =$

$(k_{m+1},...,k_r)$ fixés une formule asymptotique pour

$$N_{m,\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \sum_{\forall j\in\{1,...,m\},\ k_j\leqslant P_j} \overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1,...,k_r)$$
$$= \operatorname{Card}\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall j \in \{m+1,...,r\},\ \Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor = k_j$$
$$\forall j \in \{1,...,m\},\ \Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor \leqslant P_j,\ \forall i \in \{1,...,n+r\},$$
$$|x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)\prod_{j=1}^{m}\Big(\Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor + 1\Big)^{a_{i,j}}\Big\}.$$

Nous allons dans un premier temps fixer tous les x_i tels que $a_{i,j} = 0$ pour tout $j \in \{1,...,m\}$. Notons

$$I_m = \{i \in \{1,...,n+r\} \mid \forall j \in \{1,...,m\},\ a_{i,j} = 0\}.$$

Fixons un élément $(x_i)_{i\in I_m}$ tel que si $\boldsymbol{x}^{E(n+j)}$ est un monôme en $(x_i)_{i\in I_m}$ alors $\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \rfloor = k_j$ et pour tout $i \in I_m$, $|x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)$. On notera $s = \operatorname{Card} I_m$ et :

(4.53)
$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \operatorname{Card}\big\{(x_i)_{i\notin I_m} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r-s} \mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall j \in \{m+1,...,r\},$$
$$\Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor = k_j,\ \forall j \in \{1,...,m\},\ \Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor \leqslant P_j,$$
$$\forall i \notin I_m,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)\prod_{j=1}^{m}\Big(\Big\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \Big\rfloor + 1\Big)^{a_{i,j}}\Big\}.$$

On écrit alors :

$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \int_0^1 S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)d\alpha$$

où
(4.54)
$$S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha) = \sum_{\substack{(x_i)_{i\notin I_m}\in(\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r-s} \\ \forall j\in\{m+1,...,r\},\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\rfloor = k_j \\ \forall j\in\{1,...m\},\ \lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\rfloor\leqslant P_j \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)\prod_{j=1}^{m}(\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\rfloor+1)^{a_{i,j}}}} e\left(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})\right).$$

Dans toute cette section le symbole $\ll$ désignera une majoration à une constante multiplicative indépendante de $(x_i)_{i\in I_m}$ près.

4.4.1 Inégalité de Weyl

Fixons un ensemble de degrés $(t_{j,k}^{(m)})_{\substack{j\in\{1,...,m\}\\ k\in\{1,...,d_j\}}}$ et on note

$$I_{0,m}=\{i\notin I_m \mid \forall j\in\{1,...,m\},\ t_{j,a_{i,j}}^{(m)}\neq 0\},$$
$$\mathcal{C}_{0,m}=\{(j,k)\mid j\in\{1,...,m\},\ \exists i\in I_{0,m},\ a_{i,j}=k\},$$
$$\boldsymbol{t}^{(m)}=(t_{j,k}^{(m)})_{(j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}},$$
$$\forall (j,k)\in\mathcal{C}_{0,m},\ J_m(j,k)=\{i\in I_{0,m}\mid a_{i,j}=k\}.$$

On notera d'autre part, comme dans la section précédente :
- $\tilde{L}_m=\{(i,\boldsymbol{l})\mid i\in I_{0,m},\ \boldsymbol{l}=(l_1,...,l_m)\in\prod_{j=1}^m\{1,...,t_{j,a_{i,j}}+1\}\}$,
- $L_m=\{(i,\boldsymbol{l})\mid i\in I_{0,m},\ \boldsymbol{l}=(l_1,...,l_m)\in\prod_{j=1}^m\{1,...,t_{j,a_{i,j}}\}\}$,
- $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}$, $L_m(j,k)=\{(i,\boldsymbol{l})\in L\mid i\in J_m(j,k)\}$,
- $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}$, $\widehat{L}_m(j,k)=\{(i,\boldsymbol{l})\in L_m(j,k)\mid l_j\neq t_{j,k}\}$,
- $\forall (j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}$, $E_m(j,k)=L_m(j,k)\setminus\widehat{L}_m(j,k)=\{(i,\boldsymbol{l})\in L_m(j,k)\mid l_j=t_{j,k}\}$,

Comme dans la section précédente, nous remarquons que l'on peut écrire le polynôme F sous la forme

$$F(\boldsymbol{x})=\sum_{\substack{\boldsymbol{d}=(d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}}\\ \forall j\in\{1,...,m\},\ \sum_{k\geqslant 1}kd_{j,k}=d_j}}F_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}),$$

où $F_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x})$ est un polynôme homogène de degré $d_{j,k}$ en les variables $(x_i)_{i\in I_{0,m}}$ telles que $a_{i,j}=k$ pour tout $j\in\{1,...,m\}$.

En effectuant les mêmes opérations que pour les sections 4.3.2 et 4.3.3 (en ne considérant cette fois-ci que les variables $(x_i)_{i\in I_{0,m}}$) en posant $D_j^{(m)}=\sum_{k\geqslant 1}t_{j,k}^{(m)}$, $\Delta^{\boldsymbol{t}^{(m)}}=\Delta^{\boldsymbol{t}_1^{(m)}}\circ\Delta^{\boldsymbol{t}_2^{(m)}}\circ...\circ\Delta^{\boldsymbol{t}_m^{(m)}}$, et pour tout $(j,k)\in\mathcal{C}_{0,m}$

$$\Delta^{\boldsymbol{t}^{(m)}}F\left((x_i)_{i\in I_m}(x_i^{\boldsymbol{l}})_{(i,\boldsymbol{l})\in L_m}\right)=\sum_{(i,\boldsymbol{l})\in E_m(j,k)}\gamma_{(i,\boldsymbol{l},m)}^{(j,k)}\left((x_i)_{i\in I_m}(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in L_m\setminus E_m(j,k)}\right)e_ix_i^{\boldsymbol{l}}$$

et en notant alors pour tous $(A_{i,\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in L_m\setminus E_m(i_0,K_{j_0})}$, $(B_{i,\boldsymbol{l}})_{E_m(i_0,K_{j_0})}$:

$$M_{(j_0,K_{j_0})}^{(m)}\left(\alpha,(A_{i,\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in L_m\setminus E_m(i_0,K_{j_0})},(B_{i,\boldsymbol{l}})_{E_m(i_0,K_{j_0})}\right)=\mathrm{Card}\Big\{(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(m,\boldsymbol{h})\in L_m\setminus E_m(i_0,K_{j_0})}\mid\forall (m,\boldsymbol{h}),\ |x_i^{\boldsymbol{h}}|\leqslant A_{m,\boldsymbol{h}}\text{ et }$$
$$\forall (i,\boldsymbol{l})\in E_m(i_0,K_{j_0}),\ \left\|\alpha e_i\gamma_{(i,\boldsymbol{l},m)}^{(j_0,K_{j_0})}\left(((x_i)_{i\in I_m}(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in L_m\setminus E_m(j_0,K_{j_0})}\right)\right\|<B_{i,\boldsymbol{l}}\Big\},$$

on obtient le résultat suivant qui est un analogue du lemme 4.3.18 :

Lemme 4.4.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $K_m > 0$ et $P \geqslant 1$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.

$$|S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i\in I_{0,m}} e_i^{1+\varepsilon-\frac{\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}}^{(m)}}{2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}}}} \right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+\varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j+1+\varepsilon} \right) P^{-K_m\theta},$$

2. Il existe un certain $(j_0, K_{j_0}) \in \mathcal{C}_{0,m}$ tel que

$$M_{(j_0,K_{j_0})}^{(m)} \left(\alpha, \left(\frac{1}{e_i} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}} \right) P^{\sum_{j=1}^m a_{i,j}\theta} \right)_{(i,\boldsymbol{l})\in\widehat{L}_m(j_0,K_{j_0})}, (e_i P^{\sum_{j=1}^m (d_j-a_{i,j})\theta} \prod_{j=1}^{m} P_j^{-d_j})_{(i,\boldsymbol{l})\in E_m(j_0,K_{j_0})} \right)$$

$$\gg \left(\prod_{i\in I_{0,m}} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}} \right)^{\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}}} (P^{(\sum_{j=1}^m a_{i,j})\theta})^{\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}}} \right) \left(\prod_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}} \right)^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}} (P^{\sum_{j=1}^m a_{i,j}\theta})^{\prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}} \right)^{-1} P^{-2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}} K_m\theta}.$$

Remarquons que le cardinal considéré dans le cas 2 peut être majoré trivialement par

$$\mathrm{Card}\{(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in\widehat{L}_m(j_0,K_{j_0})} \mid |x_i^{\boldsymbol{h}}| \leqslant \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}} \right) P^{\sum_{j=1}^r a_{m,j}\theta},$$

$$\forall (i,\boldsymbol{l}) \in E_m(j_0,K_{j_0}),\ ||\alpha e_i \gamma_{i,\boldsymbol{l},m}^{(j_0,K_{j_0})}(x_i^{\boldsymbol{h}})|| < e_i P^{\sum_{j=1}^m (d_j-a_{i,j})\theta} \prod_{j=1}^{m} P_j^{-d_j}\},$$

que, d'après le lemme 3.3.11, nous pouvons majorer par :

$$\prod_{(i,\boldsymbol{h})\in\widehat{L}_m(j_0,K_{j_0})}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{a_{i,j}}\right)P^{((\sum_{j=1}^{r}a_{i,j})-1)\theta}$$
$$\mathrm{Card}\left\{(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in\widehat{L}_m(j_0,K_{j_0})}\mid |x_i^{(\boldsymbol{h})}|\leqslant P^\theta,\ \forall(i,\boldsymbol{l})\in E_m(j_0,K_{j_0}),\right.$$
$$\left.||\alpha e_i\gamma_{i,\boldsymbol{l},m}^{(j_0,K_{j_0})}(x_i^{\boldsymbol{h}})||<e_iP^{\sum_{j=1}^{m}(d_j-a_{i,j})\theta}\prod_{j=1}^{m}P_j^{-d_j}\right\}.$$

Si l'un des éléments $(x_i^{\boldsymbol{h}})$ comptés par le cardinal ci-dessus est tel qu'il existe $(i,\boldsymbol{l})\in E_m(j_0,K_{j_0})$ tels que $q=\gamma_{i,\boldsymbol{l},m}^{(j_0,K_{j_0})}(x_i^{\boldsymbol{h}})\neq 0$, on a alors (quitte à changer θ)

$$2||\alpha q e_i||\leqslant e_iP^{((\sum_{j=1}^{m}d_j)-1)\theta}\prod_{j=1}^{m}P_j^{-d_j}$$

et d'autre part

$$|q|\leqslant\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)P^{((\sum_{j=1}^{m}d_j)-1)\theta}.$$

Par conséquent si l'on pose $\tilde{d}_m=(\sum_{j=1}^{m}d_j)-1$ et

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k},i)}(\theta)=\{\alpha\in[0,1[\ \mid |2\alpha e_iq-a|<e_iP^{-1+\tilde{d}_m\theta}\}\tag{4.55}$$

$$\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k},i)}(\theta)=\bigcup_{0<q\leqslant\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)P^{\tilde{d}_m\theta}}\ \bigcup_{0\leqslant a<e_iq}\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k},i)}(\theta),\tag{4.56}$$

$$\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)=\bigcup_{i\in I_0}\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k},i)}(\theta),\quad \mathfrak{m}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)=[0,1[\setminus\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta).\tag{4.57}$$

et par ailleurs

$$A_{(j_0,K_{j_0})}^{(x_i)_{i\in I_m}}(P^\theta)=\mathrm{Card}\left\{(x_i^{\boldsymbol{h}})_{(i,\boldsymbol{h})\in\widehat{L}_m(j_0,K_{j_0})}\mid |x_i^{\boldsymbol{h}}|\leqslant P^\theta,\right.$$
$$\left.\forall(i,\boldsymbol{l})\in E_m(j_0,K_{j_0}),\ \gamma_{i,\boldsymbol{l},m}^{(j_0,K_{j_0})}(x_i^{\boldsymbol{h}})=0\right\}.$$

Lemme 4.4.2. *Pour tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit et tous $\kappa>0$, $P\geqslant 1$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1.

$$|S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i\in I_{0,m}} e_i^{1+\varepsilon+\frac{\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}}}{2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}}}}\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j+1+\varepsilon}\right) P^{-K_m\theta},$$

2. le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)$,

3. Il existe un certain $(j_0, K_{j_0}) \in \mathcal{C}_{0,m}$ tel que

$$A_{(j_0,K_{j_0})}^{(x_i)_{i\in I_m}}(P^\theta) \gg \left(\prod_{i\in I_{0,m}} (P^\theta)^{\prod_{j=1}^r t_{j,a_{i,j}}}\right) \left(\prod_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} (P^\theta)^{\prod_{j\neq j_0}^r t_{j,a_{i,j}}}\right)^{-1} P^{-2^{\sum_{j=1}^r D_j^{(m)}} K_m\theta}.$$

Si l'on se place dans le cas 3, considérons $\mathcal{L}_{(x_i)_{i\in I_m}}$ le sous-espace affine de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n(j_0,K_{j_0})}$ (où $n(j_0,K_{j_0}) = \sum_{i\in I_{0,m}} \prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}} - \sum_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} \prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$ défini par les $\sum_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} \prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$ équations $\gamma_{i,\boldsymbol{l},m}^{(j_0,K_{j_0})}(x_i^{\boldsymbol{h}}) = 0$). La condition 3 implique alors :

$$\dim \mathcal{L}_{(x_i)_{i\in I_m}} \geqslant n(j_0,K_{j_0}) - 2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}} K.$$

Soit $\mathcal{D}$ la sous-variété de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n(j_0,K_{j_0})}$ définie par les $\sum_{i\in I_{0,m}} (\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}} - 1) - \sum_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} \prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}}$ équations

$$\forall i \in I_{0,m}, \boldsymbol{h} \mid (i, h^{(j_0)}) \neq (K_{j_0}, t_{j_0,K_{j_0}}),\ \ x_i^{(\boldsymbol{h})} = x_i^{(1,\dots,1)}.$$

On observe alors que :

(4.58)

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{D}\cap\mathcal{L}_{(x_i)_{i\in I_m}} &\geqslant \dim \mathcal{L}_{(x_i)_{i\in I_m}} - \sum_{i\in I_{0,m}} (\prod_{j=1}^m t_{j,a_{i,j}} - 1) + \sum_{i\in J_m(j_0,K_{j_0})} \prod_{j\neq j_0} t_{j,a_{i,j}} \\ &\geqslant \operatorname{Card} I_{0,m} - 2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}} K.\end{aligned}$$

Or, $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}_{(x_i)_{i\in I_m}}$ est isomorphe à la variété :

$$\{(x_i)_{i\in I_{0,m}} \mid \forall i \in J_m(j_0,K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}}{\partial x_i}((x_i)_{i\in I_{0,m}}) = 0\}.$$

En notant

$$V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t},(j_0,K_{j_0})} = \{(x_i)_{i\notin I_m} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+r-s} \mid \\ \forall i \in J_m(j_0,K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}}{\partial x_i}((x_i)_{i\in I_m},(x_i)_{i\in I_{0,m}}) = 0\},$$

l'inégalité (4.58) implique alors :

$$\dim V^*_{m,(e_ix_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} \geqslant n+r-s-2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}}K.$$

Nous introduisons à présent un paramètre $\lambda \in \mathbf{Z}$ (que nous préciserons ultérieurement) et nous définissons

(4.59)

$$\mathcal{A}_m^\lambda = \left\{(x_i)_{i\in I_m} \mid \forall (j_0,K_{j_0}),\ \dim V^*_{m,(e_i,x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} < \dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - s + \lambda\right\}$$

où l'on a posé

$$V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+r} \mid \forall i \in J_m(j_0,K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Nous fixerons dorénavant

$$K_m = (n+r-\max_{(j_0,K_{j_0})}\dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - \lambda + \varepsilon)/2^{\sum_{j=1}^m D_j^{(m)}}, \tag{4.60}$$

de sorte que pour tout $(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^\lambda$ la condition 3 n'est plus possible. On choisit

$$P = \prod_{j=1}^m P_j^{d_j} \tag{4.61}$$

et on obtient donc finalement un analogue de la proposition 4.3.9 pour $(x_i)_{i\in I_m}$ fixé :

Lemme 4.4.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et pour tout $(x_i)_{i\in I_m}$ tel que $(e_ix_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^\lambda$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. *on a la majoration :*

$$|S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}} \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^m P_j^{n_j+1}\right) P^{-K_m\theta+\varepsilon},$$

2. *le réel α appartient à $\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)$.*

4.4.2 Méthode du cercle

On fixe à présent un réel $\theta \in [0,1]$ et on suppose de plus que

$$K_m > 2\tilde{d}_m \geqslant 1.$$

On notera par ailleurs

$$e_{0,m} = \max_{i \notin I_m} e_i, \tag{4.62}$$

$$\phi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{k}, \theta) = e_{0,m} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j} \right) P^{\tilde{d}_m \theta}, \tag{4.63}$$

$$\Delta(\theta, K_m) = \theta(K_m - 2\tilde{d}_m). \tag{4.64}$$

Les arcs mineurs

Nous commençons par donner une estimation de la contribution des arcs mineurs :

Lemme 4.4.4. *On a la majoration :*

$$\int_{\mathfrak{m}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)} |S_{(x_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{e}}(\alpha)| d\alpha \ll e_{0,m} \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1+\frac{1}{2^m}}$$
$$\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j} + d_j + \varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j + 1} \right) P^{2\varepsilon - \Delta(\theta, K_m)}.$$

Démonstration. Considérons une suite $(\theta_i)_{i\in\{0,\dots,T\}}$ (avec T tel que $T \ll P^{\frac{\varepsilon}{2}}$) vérifiant :

$$\theta = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_T,$$

et

$$\forall i \in \{0, \dots, T-1\}, \;\; 2\tilde{d}_m(\theta_{i+1} - \theta_i) < \varepsilon/2. \tag{4.65}$$

D'après le lemme 4.4.3,

$$\int_{\alpha \notin \mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta_T)} |S_{(x_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{e}}(\alpha)| d\alpha$$
$$\ll \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1+\frac{1}{2^m}} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j} + \varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j + 1} \right) P^{-K_m \theta_T + \varepsilon}$$
$$\ll \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1+\frac{1}{2^m}} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j} + \varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j + 1} \right) \underbrace{P^{\varepsilon + 1 - K_m \theta_T}}_{\leqslant P^{-\Delta(K_m, \theta)}}.$$

Par ailleurs, pour tout θ et tout $i \in I_{0,m}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{(i)}(\theta)) &\ll \sum_{0<q\leqslant\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)P^{\tilde{d}_m\theta}} \sum_{0\leqslant a<e_iq} \frac{1}{q}P^{-1+\tilde{d}_m\theta} \\ &\ll e_{0,m}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)P^{-1+2\tilde{d}_m\theta}.\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $t \in \{0, ..., T-1\}$:

$$\int_{\alpha\in\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta_{t+1})\setminus\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})}(\theta_t)} |S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)|d\alpha$$

$$\ll e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+d_j+\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j+1}\right)P^{-K_m\theta_t+2\tilde{d}_m\theta_{t+1}+\varepsilon}.$$

Or on observe que

$$\begin{aligned}P^{-K_m\theta_t+2\tilde{d}_m\theta_{t+1}+\varepsilon} &= P^{-(K_m-2\tilde{d}_m)\theta_t+2\tilde{d}_m(\theta_{t+1}-\theta_t)+\varepsilon} \\ &= P^{-\Delta(K_m,\theta_t)+3\varepsilon/2} \\ &\leqslant P^{-\Delta(K_m,\theta)+3\varepsilon/2}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat en sommant sur tous les $t \in \{0, ..., T-1\}$. □

Les arcs majeurs

Définissons à présent une nouvelle famille d'arcs majeurs :

$$\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta) = \{\alpha \in [0,1[\mid 2|\alpha q - a| < qP^{-1+\tilde{d}_m\theta}\} \tag{4.66}$$

et posons

$$\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta) = \bigcup_{0<q\leqslant\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)} \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta), \tag{4.67}$$

On remarque que comme dans la section précédente : pour tout $i \in I_{0,m}$,

$$\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k},i)}(\theta) \subset \mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta).$$

De la même manière que nous avons établi le lemme 4.3.21, on démontre le résultat ci-dessous :

Lemme 4.4.5. *Pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$ tel que $\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 < P^{1-3\tilde{d}_m\theta}$, les intervalles $\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta)$ sont disjoints deux à deux.*

D'après les résultats obtenus sur les arcs mineurs, si $\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^2 < P^{1-3\tilde{d}_m\theta}$:

(4.68)
$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \sum_{1\leqslant q\leqslant \phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)}\ \sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta)} S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)d\alpha$$
$$+O\left(e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}+d_j+\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j-d_j+1}\right)P^{2\varepsilon-\Delta(\theta,K_m)}\right)$$

Établissons à présent le lemme suivant :

Lemme 4.4.6. *Si α appartient à $\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta)$ et si l'on pose $\alpha = \frac{a}{q}+\beta$ avec $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}P^{-1+\tilde{d}_m\theta}$, alors :*

$$S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha) = \left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j}\right)$$
$$q^{-(n+r-s)}S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(P\beta)$$
$$+\,O\left(e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j}\right)qP_m^{-1}P^{\tilde{d}_m\theta}\right),$$

où l'on a noté
(4.69)
$$S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m}) = \sum_{(b_i)_{i\notin I_m}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r-s}} e\left(\frac{a}{q}F((e_ix_i)_{i\in I_m},(e_ib_i)_{i\notin I_m})\right),$$

$$I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(\beta)$$
$$= \int_{(u_i)_{i\notin I_m}\in\Xi(\boldsymbol{k},(x_i)_{i\in I_m})} e\left(\beta F((e_ix_i)_{i\in I_m},(\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{a_{i,j}}\right)u_i)_{i\notin I_m})\right)d(u_i)_{i\notin I_m}.$$

où

$$\begin{aligned}(4.70)\quad \Xi(\boldsymbol{k},(x_i)_{i\in I_m}) = \{(u_i)_{i\notin I_m} \in \mathbf{R}^{n+r-s} \mid \\ \forall i\notin I_m,\ \left|\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}}\right)u_i\right| \leqslant \left|((e_l x_l)_{l\in I_m},(\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{l,j}}\right)u_l)_{l\notin I_m})^{E(i)}\right| \\ \forall j\in\{m+1,...,r\}, k_j \leqslant \left((e_l x_l)_{l\in I_m},(\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{l,j}}\right)u_l)_{l\notin I_m}\right)^{E(n+j)} < k_j+1 \\ \forall j\in\{1,...,m\},\ \left|((e_l x_l)_{l\in I_m},(\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{l,j}}\right)u_l)_{l\notin I_m})^{E(n+j)}\right| \leqslant 1\}\end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer que lorsque $e_{0,m}q > P_m$, l'égalité du lemme est triviale. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}|S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| &\ll \prod_{i\notin I_m}\frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{a_{i,j}}\right) \\ &= \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \\ &\ll \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right)P_m^{-1}e_{0,m}P^{\tilde{d}_m\theta}\end{aligned}$$

et en utilisant les estimations triviales

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})| \ll q^{n+r-s} \quad\text{et}\quad |I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(P\beta)| \ll 1,$$

on a alors :

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) \\ &\qquad q^{-(n+r-s)}|S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})||I_{\boldsymbol{k},(x_i)_{i\in I_m}}(P\beta)| \\ &\ll \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) \\ &\ll \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right)P_m^{-1}qe_{0,m}P^{\tilde{d}_m\theta}.\end{aligned}$$

d'où le résultat. Nous supposerons donc $e_{0,m}q \leqslant P_m$.

Comme dans la démonstration du lemme 4.3.22, on peut écrire :
(4.71)
$$S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)=\sum_{\boldsymbol{b}=(b_i)_{i\notin I_m}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r-s}} e\left(\frac{a}{q}F((e_ix_i)_{i\in I_m},(e_ib_i)_{i\notin I_m})\right)\tilde{S}_m(\boldsymbol{b})$$
où
$$\tilde{S}_m(\boldsymbol{b})=\sum_{(x_i)_{i\notin I_m}\in I(q,\boldsymbol{k})} e(\beta F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}))$$
avec
$$\begin{aligned}I(q,\boldsymbol{k})=\{(x_i)_{i\notin I_m}\mid \forall i\notin I_m,\ x_i\equiv b_i(q)\\ \forall j\in\{1,...,m\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor\leqslant P_j\\ \forall j\in\{m+1,...,r\},\ k_j\leqslant|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|<k_j+1\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1)^{a_{i,j}}\}\end{aligned}$$
On considère deux éléments $(x'_i)_{i\notin I_m}$ et $(x''_i)_{i\notin I_m}$ deux élément de $\mathbf{R}^{n+r-s}$ tels que
$$|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|\leqslant 2$$
et tels que $(qx'_i+b_i)_{i\notin I_m}$, $(qx''_i+b_i)_{i\notin I_m}$ soient deux éléments de $I(q,\boldsymbol{k})$. On a alors
$$\left|F(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{b}))-F(\boldsymbol{e}.(q\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{b}))\right|\ll e_{0,m}q\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{d_j}\right)P_m^{-1}.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned}\tilde{S}_m(\boldsymbol{b})=&\int_{(\tilde{u}_i)_{i\notin I_m}\in\tilde{\Xi}(q,\boldsymbol{k},(x_i)_{i\in I_m})} e(\beta F((e_iu_i)_{i\in I_m},(e_iq\tilde{u}_i)_{i\notin I_m}))(d\tilde{u}_i)_{i\notin I_m}\\ &+O\left(\underbrace{|\beta|}_{\leqslant P^{-1+\tilde{d}_m\theta}}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}q^{-(n+r-s)}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\right.\\ &\left.\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{d_j}\right)P_m^{-1}qe_{0,m}\right)\\ &+O\left(e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j}\right)q^{-(n+r-s)+1}P_m^{-1}\right)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}(q, \boldsymbol{k}, (x_i)_{i \in I_m}) = \{(\tilde{u}_i)_{i \notin I_m} \in \mathbf{R}^{n+r-s} \mid \\ \forall i \notin I_m,\ |q\tilde{u}_i| \leqslant |((e_l x_l)_{l \in I_m}, (e_l q \tilde{u}_l)_{l \notin I_m})^{E(i)}| \\ \forall j \in \{m+1, ..., r\}, k_j \leqslant |((e_l x_l)_{l \in I_m}, (e_l q \tilde{u}_l)_{l \notin I_m})^{E(n+j)}| < k_j + 1 \\ \forall j \in \{1, ..., m\},\ |((e_l x_l)_{l \in I_m}, (e_l q \tilde{u}_l)_{l \notin I_m})^{E(n+j)}| \leqslant P_j\}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$\forall i \notin I_m,\ \ q\tilde{u}_i = \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{a_{i,j}}\right) u_i,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_m(\boldsymbol{b}) = \left(\prod_{i \notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) q^{-(n+r-s)} \\ \int_{(u_i)_{i \notin I_m} \in \Xi(\boldsymbol{k}, (x_i)_{i \in I_m})} e(\beta P F((e_i x_i)_{i \in I_m}, (u_i)_{i \notin I_m}))(du_i)_{i \notin I_m} \\ + O\left(\left(\prod_{i \notin I_m} e_i\right)^{-1} q^{-(n+r-s)} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_m} a_{i,j}}\right)\right. \\ \left.\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) P_m^{-1} q e_{0,m} P^{\tilde{d}_m \theta}\right)\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remplacer $\tilde{S}(\boldsymbol{b})$ par cette expression dans (4.71) pour trouver l'égalité du lemme.

□

En observant que :

$$\mathrm{Vol}(\mathfrak{M}^{(\boldsymbol{k})\prime}(\theta)) \ll \sum_{1 \leqslant q \leqslant \phi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{k}, \theta)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} P^{-1+\tilde{d}_m \theta} \ll \left(e_{0,m} \prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 P^{-1+3\tilde{d}_m \theta}.$$

et en utilisant le lemme 4.4.6 dans la formule (4.68), on obtient pour tout

$(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^\lambda \cap \mathbf{Z}^s$

$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta}) \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(e_{0,m}^4\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{3d_j+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)P_m^{-1}P^{5\tilde{d}_m\theta}\right).$$
$$+O\left(e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j+\varepsilon+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j+1}\right)P^{2\varepsilon-\Delta(\theta,K_m)}\right), \tag{4.72}$$

avec

$$\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(Q) = \sum_{1\leqslant q\leqslant Q} q^{-(n+r-s)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m}), \tag{4.73}$$

$$J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\phi) = \int_{|\beta|\leqslant\phi} I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(\beta)d\beta. \tag{4.74}$$

Posons à présent :

$$\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(n+r-s)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m}), \tag{4.75}$$

$$J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}} = \int_{\beta\in\mathbf{R}} I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(\beta)d\beta. \tag{4.76}$$

Nous allons à présent démontrer des analogues des lemmes 4.3.24 et 4.3.25 :

Lemme 4.4.7. *Soit* $(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^\lambda \cap \mathbf{Z}^s$. *Si l'on suppose*

$$K_m b_m > \left(b_m + 3\sum_{j=1}^{m} b_j\right)\tilde{d}_m + 2,$$

l'intégrale $J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}$ est absolument convergente et on a de plus

$$|J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})-J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}|$$
$$\ll\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon}P^{\left((1+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j})\tilde{d}_m-\frac{b_mK_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\theta+\varepsilon}.$$

Par ailleurs

$$|J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}|\ll\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon}.$$

Démonstration. Considérons $\beta\in\mathbf{R}$ et choisissons des paramètres $P_1,...,P_m$, P et θ' tels que

$$|\beta|=\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta'}, \tag{4.77}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{m}P_j\right)P^{-K_m\theta'}=\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^2P^{2\tilde{d}_m\theta'}P_m^{-1}. \tag{4.78}$$

Ces deux égalités impliquent alors

$$\left(\prod_{j=1}^{m}P_j\right)P^{-K_m\theta'}=\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^2(2|\beta|)^2P_m^{-1}$$

et donc

$$\theta'=\frac{\frac{1}{\tilde{d}_m}\log(2|\beta|)\frac{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j}}{2\log(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j})+\left(\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+2\right)\log(2|\beta|)}. \tag{4.79}$$

En particulier
$$\theta'\gg\min\{1,\frac{\log(2|\beta|)}{\log(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j})}\}.$$

Par ailleurs l'égalité (4.78) implique

$$\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j}\right)^2P^{-1+3\theta'\tilde{d}_m}=\underbrace{\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{d_j}\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m}P_j\right)P_m}_{\leqslant 1}\underbrace{P^{(\tilde{d}_m-K_m)\theta'}}_{<1}<1,$$

et donc d'après le lemme 4.4.5, les arcs majeurs $\mathfrak{M}_{a,q}^{(\boldsymbol{k})'}(\theta')$ sont disjoints. Dans tout ce qui va suivre, nous fixerons $e_i = 1$ pour tout $i \notin I_m$, et donc $e_{0,m} = 1$. On remarque que le réel $P^{-1}\beta$ appartient au bord de $\mathfrak{M}_{0,1}^{(\boldsymbol{k})}(\theta')$. Par conséquent, en utilisant le lemme 4.4.3, on a :
(4.80)

$$|S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P^{-1}\beta)| \ll \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j+1}\right) P^{-K_m\theta'+\varepsilon},$$

D'autre part, d'après le lemme 4.4.6 :

(4.81)

$$\begin{aligned} S_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P^{-1}\beta) = &\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(\beta) \\ &+ O\left(\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) qP_m^{-1}P^{\tilde{d}_m\theta'}\right). \end{aligned}$$

Nous déduisons de (4.80) et (4.81) que :

$$\begin{aligned} |I_{\boldsymbol{k},(x_i,e_i)_{i\in I_m}}(\beta)| &\ll \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\varepsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j\right) P^{-K_m\theta'+\varepsilon} + \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right) P^{2\tilde{d}_m\theta'}P_m^{-1} \\ &\ll \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j\right)^{\varepsilon}\left(\prod_{j=1}^{m} P_j\right) P^{-K_m\theta'+\varepsilon} \\ &= \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j\right)^{\varepsilon} P^{\left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j}\right)-K_m\theta'+\varepsilon} \\ &\ll \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j\right)^{\varepsilon} |\beta|^{\frac{1}{\tilde{d}_m\theta'}\left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j}+\varepsilon\right)-\frac{K_m}{\tilde{d}_m}}. \end{aligned}$$

pour tout $\beta \in \mathbf{R}$.

On a donc que

$$\begin{aligned} &|J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta}) - J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}| \\ &\qquad \ll \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j\right)^{\varepsilon} \int_{|\beta|\geqslant\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta}} |\beta|^{\frac{1}{\tilde{d}_m\theta'}\left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j}+\varepsilon\right)-\frac{K_m}{\tilde{d}_m}} d\beta. \end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité (4.79) :

$$\frac{1}{\tilde{d}_m\theta'}\frac{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j} \leqslant \frac{2\log\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)}{\log(2|\beta|)} + \left(\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+2\right),$$

donc

$$\frac{1}{\tilde{d}_m\theta'}\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j} \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\left(\frac{2\log\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)}{\log(2|\beta|)} + \left(\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+2\right)\right),$$

et ainsi :

$$|\beta|^{\frac{1}{\tilde{d}_m\theta'}\left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_jd_j}+\varepsilon\right)} \ll \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j+\varepsilon}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}} |\beta|^{\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\left(\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+2\right)+\varepsilon}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&|J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta}) - J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}| \\
&\ll \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j+\varepsilon}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}} \int_{|\beta|\geqslant\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta}} |\beta|^{-\frac{b_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon} d\beta \\
&\qquad \ll \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon} P^{\left(\left(1+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\tilde{d}_m-\frac{b_mK_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\theta+\varepsilon},
\end{aligned}$$

car on a supposé $K_mb_m > \left(b_m+3\sum_{j=1}^m b_j\right)\tilde{d}_m+2$, ce qui implique la convergence. En particulier, si l'on choisit $P \ll 1$, cette majoration donne :

$$|\underbrace{J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})}_{\ll 1} - J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}| \ll \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon},$$

et donc

$$|J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}| \ll \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)^{\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon},$$

et le lemme est démontré.

□

Nous allons à présent comparer $\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}$ et $\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))$. Pour cela, introduisons la série génératrice (pour $T \geqslant 1$ fixé) :

$$\tilde{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha) = \sum_{\substack{(x_i)_{i\notin I_m} \\ |x_i|\leqslant T}} e(\alpha F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})). \tag{4.82}$$

Comme nous l'avons fait pour le lemme 4.4.3, nous pouvons établir :

Lemme 4.4.8. *Pour tout réel $T \geqslant 1$, l'une au moins des assertions suivantes est vraie :*

1. *on a la majoration :*
$$|\tilde{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll T^{n+r-s+\varepsilon-K_m\theta}$$
2. *le réel α appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}^{(\boldsymbol{k})}(\theta)$,*

où

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{(\boldsymbol{k})}(\theta) = \bigcup_{i\in I_{0,m}} \bigcup_{0<q\leqslant e_{0,m}\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)T^{\tilde{d}_m\theta}} \bigcup_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \tilde{\mathfrak{M}}_{a,q}^{(i,\boldsymbol{k})}(\theta), \tag{4.83}$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{a,q}^{(i,\boldsymbol{k})}(\theta) = \{\alpha \in [0,1[\mid |\alpha q - a| < e_i T^{-\max\{\sum_{k\geqslant 1} t_{j,k}\}+\tilde{d}_m\theta}\}. \tag{4.84}$$

Nous pouvons alors démontrer :

Lemme 4.4.9. *Si l'on suppose que $\boldsymbol{t}$ est tel que, il existe $j \in \{1,...,r\}$ tel que $\sum_{k\geqslant 1} t_{j,k} \geqslant 2$, la série $\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}$ est absolument convergente et on a de plus*

$$|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)) - \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}| \ll \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)^{2+\delta} P^{\theta(2\tilde{d}_m-K_m)+\varepsilon},$$

et

$$|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}| \ll \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right)^{2+\delta}.$$

Démonstration. On considère $q > \phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)$ et $\alpha = \frac{a}{q}$ avec $0 \leqslant a < q$ et $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$. On observe que

$$S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m}) = \tilde{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha),$$

avec $T = q$. On considère θ' tel que $q = \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right) q^{\tilde{d}_m\theta'}$. Posons par ailleurs $\theta'' = \theta' - \nu$ avec $\nu > 0$ arbitrairement petit. Supposons qu'il existe $a', q' \in \mathbf{Z}$ tels que $q' \leqslant \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right) q^{\tilde{d}_m\theta''} < q$, $0 \leqslant a' < q'$, $\mathrm{pgcd}(a', q') = 1$ et $\alpha \in \tilde{\mathfrak{M}}_{a,q}^{(i,\boldsymbol{k})}(\theta'')$. On a alors

$$1 \leqslant |aq' - a'q| \leqslant qe_i q^{\tilde{d}_m\theta'' - \max_j\{\sum_{k\geqslant 1} t_{j,k}\}} < q^{2-\max_j\{\sum_{k\geqslant 1} t_{j,k}\}} \leqslant 1,$$

ce qui est absurde. Donc $\alpha \notin \tilde{\mathfrak{M}}^{(\boldsymbol{k})}(\theta'')$. D'après le lemme précédent, on a donc :

$$|S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})| = |\tilde{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\alpha)| \ll q^{n+r-s+\varepsilon-K_m\theta'}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)) - \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}| \\
&\qquad \ll \sum_{q>\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)} q^{-(n+r-s)} \sum_{\substack{0\leqslant a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} |S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})| \\
&\qquad \ll \sum_{q>\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)} q^{1+\varepsilon-K_m\theta'} \\
&\qquad \ll \sum_{q>\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)} q^{-\frac{K_m}{\tilde{d}_m}+1+\varepsilon} \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{\frac{K_m}{\tilde{d}_m}} \\
&\qquad \ll \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{2+\delta} P^{\theta(2\tilde{d}_m-K_m)+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En choisissant par ailleurs $P \ll 1$, cette majoration implique (puisque $\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)) \ll \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2$) :

$$|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}| \ll \left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{2+\delta}.$$

□

Nous pouvons alors établir le résultat suivant :

Lemme 4.4.10. *Soit $(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^{\lambda} \cap \mathbf{Z}^s$. On suppose $\theta \in [0,1]$ fixé, et $P \geqslant 1$ tels que $\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 < P^{1-3\tilde{d}_m\theta}$. On a alors*

$$\begin{aligned}
&N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}} \\
&\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) + O(E_1) + O(E_2) + O(E_3)
\end{aligned}$$

où

$$E_1 = e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j+\varepsilon+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j+1}\right)P^{2\varepsilon-\Delta(\theta,K_m)},$$

$$E_2 = e_{0,m}^4\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{4d_j+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)P_m^{-1}P^{5\tilde{d}_m\theta},$$

$$E_3 = e_{0,m}^{2+\varepsilon}\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{2d_j\left(1+\frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+\varepsilon\right)+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)P^{\left((1+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j})\tilde{d}_m-\frac{b_mK_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\theta+\varepsilon}$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps qu'il existe $j\in\{1,...,r\}$ tel que $\sum_{k\geqslant 1} t_{j,k}\geqslant 2$. D'après la formule (4.72), on a

$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_m) = \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})$$
$$\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)+O(E_2)+O(E_1),$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 4.4.7 et 4.4.9 :

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})-\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}|\\
&\ll|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))-\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}||J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}|\\
&+|\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta))||J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})-J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}|\\
&\ll e_{0,m}^{2+\varepsilon}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{2+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+2\varepsilon}P^{\theta(2\tilde{d}_m-K_m)+\varepsilon}\\
&+e_{0,m}^{2+\varepsilon}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{2+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+2\varepsilon}P^{\left((1+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j})\tilde{d}_m-\frac{b_mK_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\theta+\varepsilon}\\
&\ll e_{0,m}^{2+\varepsilon}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^{2+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}+2\varepsilon}P^{\left((1+\frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j})\tilde{d}_m-\frac{b_mK_m}{b_m+\sum_{j=1}^m b_j}\right)\theta+\varepsilon},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Le cas où la famille $\boldsymbol{t}$ choisie est telle que $t_{j,k} = 1$ si $(j,k) = (j,k^{(j)})$ (pour un entier $k^{(j)}$ fixé) et 0 sinon est particulier. Les variables auxquelles nous nous intéresserons sont alors les x_i telles que $a_{i,j} = k^{(j)}$ pour tout $j \in \{1,...,m\}$ et nous écrivons alors le polynôme F sous la forme :

$$F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in J} e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) x_k + \widetilde{F}((e_i x_i)_{i\notin J}),$$

où

$$J = \{i \in I_{0,m} \mid \forall j \in \{1,...,m\},\ a_{i,j} = k^{(j)}\}.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
|S_{a,q,\boldsymbol{e}}((x_i)_{i\in I_m})| &\ll \sum_{(b_k)_{k\notin J\cup I_m}} \left| \sum_{(b_k)_{k\in J}} e\left(\frac{a}{q}\sum_{k\in J} e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) b_k\right)\right| \\
&\ll \sum_{(b_k)_{k\notin J\cup I_m}} \prod_{k\in J} \underbrace{\left|\sum_{b_k\in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}} e\left(\frac{a}{q}\sum_{k\in J} e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) b_k\right)\right|}_{=\begin{cases} q & \text{si} \quad e_k A_k((x_i)_{i\in I_m}) \equiv 0\ (q) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}} \\
&= \begin{cases} q^{n+r-s} & \text{si} \quad e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) \equiv 0\ (q)\ \ \forall k \in J \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}
\end{aligned}$$

Or, pour $q \gg e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}$, on a alors $|e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m})| < q$ pour tout $k \in J$, et donc la condition $e_k A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) \equiv 0\ (q)$ implique $A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) = 0$. Or, pour $(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^{\lambda}$, la propriété $A_k((e_i x_i)_{i\in I_m}) = 0$ pour tout $k \in J$ est impossible. Par conséquent, quitte à multiplier $\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)$ par une constante, on a que

$$\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(\phi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{k},\theta)) = \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}},$$

et en remplaçant $J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}(\frac{1}{2}P^{\tilde{d}_m\theta})$ par $J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}$ comme ci-dessus, on retrouve le résultat du lemme.

□

En choisissant $\theta > 0$ tel que $\theta < \frac{1}{5\tilde{d}_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j d_j}{b_m}$, on obtient :

Corollaire 4.4.11. *Soit $(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^{\lambda} \cap \mathbf{Z}^s$. On suppose de plus que*

$$b_m K_m > (b_m + 3\sum_{j=1}^{m} b_j)\tilde{d}_m.$$

Il existe alors un réel $\delta > 0$ tel que :

$$N_{(x_i)_{i\in I_m},\mathbf{e}}(P_1,...,P_m) = \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\mathbf{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}} \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(\left(e_{0,m}^4 \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{4d_j+\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) P^{-\delta}\right),$$

uniformément pour tous $(x_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{k}$ tels que

$$\left(e_{0,m} \prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 P^{-1+3\tilde{d}_m\theta} < 1.$$

Introduisons à présent pour $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_r)$ et $\delta > 0$ fixés la fonction

$$g_m(\boldsymbol{b},\delta) = \left(\frac{b_m + \sum_{j=1}^m b_j}{b_m}\right) 5\tilde{d}_m \left(1 - \sum_{j=m+1}^{r} (1+5d_j)\frac{b_j}{b_m} - \delta\right)^{-1} \left(\sum_{j=m+1}^{r} \left(1 + d_j\left(3 + \frac{\sum_{l=1}^m b_l}{b_m + \sum_{l=1}^m b_l} + 2\varepsilon\right)\right)\frac{b_j}{b_m} + 2\delta\right). \tag{4.85}$$

Définissons par ailleurs :

(4.86)
$$\tilde{N}_{\mathbf{e},m}(P_1,...,P_r) = \mathrm{Card}\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \mid \forall k \in \{m,...,r-1\},\ (x_i)_{i\in I_k} \in \mathcal{A}_k^\lambda,$$
$$F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall j \in \{1,...,r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor \leqslant P_j,\ \forall i \in \{1,...,n+r\},$$
$$|x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(\left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor + 1)^{a_{i,j}}\Big\}.$$

Théorème 4.4.12. *On suppose que $(m, d_1) \neq (1,1)$ et que*

$$b_m K_m > (b_m + 3\sum_{j=1}^m b_j)\tilde{d}_m,$$

$$K_m - \frac{b_m + 3\sum_{j=1}^m b_j}{b_m}\tilde{d}_m > g_m(\boldsymbol{b},\delta),$$

et

$$\sum_{j=m+1}^{r}(1+5d_j)\frac{b_j}{b_m}<1.$$

On a alors :

(4.87)

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1,...,P_r)=\sum_{\forall j\in\{m+1,...,r\},\ k_j\leqslant P_j}\left(\sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})}\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(\left(e_{0,m}^4\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_m^{-\delta}\right),$$

où $\Phi_m(\boldsymbol{k})$ *désigne l'ensemble des* $(x_i)_{i\in I_m}\in\mathcal{A}_m^{\lambda}$ *vérifiant* $(x_i)_{i\in I_k}\in\mathcal{A}_k^{\lambda}$ *pour tout* $k\in\{m,...,r-1\}$ *(remarquons que si* $k\geqslant m$ *alors* $I_k\subset I_m$*),* $|x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=m+1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}$ *pour tout* $i\in I_m$ *et* $\lfloor|(\boldsymbol{e.x})^{E(n+j)}|\rfloor\leqslant P_j$ *pour tout* $j\in\{m+1,...,r\}$ *tel que* $(\boldsymbol{e.x})^{E(n+j)}$ *ne dépend que de* $(x_i)_{i\in I_m}$*.*

Démonstration. D'après la formule du lemme 4.4.10 si l'on suppose

$$\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r}P_j^{d_j}\right)^2P^{-1+3\tilde{d}_m\theta}<1,$$

on a

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1,...,P_r)=\sum_{\forall j\in\{m+1,...,r\},\ k_j\leqslant P_j}\left(\sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})}\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j-d_j}\right)+O(\mathcal{E}_1)+O\left(\mathcal{E}_2\right)+O\left(\mathcal{E}_3\right),$$

où

$$\mathcal{E}_1\ll\sum_{\forall j\in\{m+1,...,r\},\ k_j\leqslant P_j}\ \sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})}e_{0,m}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1+\frac{1}{2^m}}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{d_j+\varepsilon+\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{m}P_j^{n_j-d_j+1}\right)P^{2\varepsilon-\Delta(\theta,K_m)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 = & \sum_{\forall j \in \{m+1,\dots,r\},\ k_j \leqslant P_j} \ \sum_{(x_i)_{i\in I_m} \in \Phi_m(\boldsymbol{k})} e_{0,m}^4 \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1} \\
& \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{4d_j + \sum_{i \notin I_m} a_{i,j}} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P_m^{-1} P^{5\tilde{d}_m \theta} \\
\ll & \sum_{\forall j \in \{m+1,\dots,r\},\ k_j \leqslant P_j} e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j + 4d_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P_m^{5\tilde{d}_m \theta \left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j d_j}{b_m} \right) - 1} \\
\ll & \ e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} P_j^{n_j + 1 + 4d_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P_m^{5\tilde{d}_m \theta \left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j d_j}{b_m} \right) - 1} \\
& \ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_m^{-\delta_1}.
\end{aligned}
$$

où

$$
-\delta_1 = \sum_{j=m+1}^{r} (1 + 5d_j) \frac{b_j}{b_m} + 5\tilde{d}_m \theta \left(\frac{\sum_{j=1}^m b_j d_j}{b_m} \right) - 1,
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 = & \sum_{\forall j \in \{m+1,\dots,r\},\ k_j \leqslant P_j} \ \sum_{(x_i)_{i\in I_m} \in \Phi_m(\boldsymbol{k})} \left(e_{0,m}^{2+\varepsilon} \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
& \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{2d_j \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} + \varepsilon \right) + \sum_{i \notin I_m} a_{i,j}} \right) \\
& \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P^{\left((1 + \frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j}) \tilde{d}_m - \frac{b_m K_m}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} \right) \theta + \varepsilon} \\
\ll & \left(e_{0,m}^{2+\varepsilon} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=m+1}^{r} P_j^{n_j + 1 + 2d_j \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} + \varepsilon \right)} \right) \\
& \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P^{\left((1 + \frac{2\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j}) \tilde{d}_m - \frac{b_m K_m}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} \right) \theta + \varepsilon} \\
\ll & \left(e_{0,m}^{2+\varepsilon} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=m+1}^{r} P_j^{n_j + 1 + 2d_j \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} + \varepsilon \right)} \right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j} \right) P_m^{-\delta}
\end{aligned}
$$

où

$$-\delta_2 = \left(\Big(\frac{b_m + 3\sum_{j=1}^m b_j}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j}\Big)\tilde{d}_m - \frac{b_m K_m}{b_m + \sum_{j=1}^m b_j} \right) \theta \frac{\sum_{j=1}^m b_j d_j}{b_m} + \varepsilon$$
$$- \sum_{j=m+1}^{r} \left(1 + d_j \left(3 + \frac{\sum_{l=1}^m b_l}{b_m + \sum_{l=1}^m b_l} + 2\varepsilon \right) \right) \frac{b_j}{b_m}.$$

Remarquons que $\mathcal{E}_1$ est négligeable par rapport à ce terme d'erreur. On choisit alors

$$\theta = \frac{1}{5\tilde{d}_m} \left(\frac{b_m}{\sum_{j=1}^m b_j d_j} \right) \left(1 - \sum_{j=m+1}^{r} (1 + 5d_j) \frac{b_j}{b_m} - \delta \right),$$

de sorte que $\delta_1 = \delta$. Par ailleurs ce choix de θ implique

$$g_m(\boldsymbol{b}, \delta) = \left(\frac{b_m + \sum_{j=1}^m b_j}{\sum_{j=1}^m b_j d_j} \right) \theta^{-1} \left(\sum_{j=m+1}^{r} \left(1 + d_j \left(3 + \frac{\sum_{l=1}^m b_l}{b_m + \sum_{l=1}^m b_l} + 2\varepsilon \right) \right) \frac{b_j}{b_m} + 2\delta \right),$$

et donc puisque l'on a supposé

$$K_m - \frac{b_m + 3\sum_{j=1}^m b_j}{b_m} \tilde{d}_m > g_m(\boldsymbol{b}, \delta),$$

on a alors $\delta_2 < \varepsilon - 2\delta < -\delta$, ce qui achève la démonstration de la proposition pour le cas où $\boldsymbol{e}$ est tel que $\left(e_0 \prod_{j=m+1}^r P_j^{d_j} \right)^2 P^{-1+3\tilde{d}_m\theta} < 1$. Dans le cas contraire, on remarque que l'égalité est triviale car le terme d'erreur est alors dominant : en effet, si l'on suppose $\left(e_0 \prod_{j=m+1}^r P_j^{d_j} \right)^2 \geqslant P^{1-3\tilde{d}_m\theta}$, on a l'estimation triviale :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1, ..., P_r) &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j} \right) \\
&\ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{d_j} \right)^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j} \right) P^{-2+6\tilde{d}_m\theta} \\
&\ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{d_j} \right)^4 P^{-1+6\tilde{d}_m\theta} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right).
\end{aligned}$$

Or, par le choix de θ on a

$$P^{-1+6\tilde{d}_m\theta} \ll \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{d_j} \right)^{-4} P_m^{\frac{6}{5}} P^{-1} \ll \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{d_j} \right)^{-4} P_m^{-\delta},$$

car $P = \prod_{j=1}^m P_j^{d_j} \geqslant P_m^2$ (puisque $(m, d_1) \neq (1,1)$). Par conséquent, on obtient

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1, ..., P_r) \ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_m^{-\delta}.$$

Par ailleurs, en utilisant les lemmes 4.4.7 et 4.4.9 on trouve :

$$\sum_{\forall j\in\{m+1,...,r\},\, k_j\leqslant P_j} \left(\sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\right)$$
$$\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$\ll e_{0,m}^{2+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} P_j^{d_j}\right)^{4+\delta} \left(\prod_{j=m+1}^{r} P_j^{n_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$\ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} t_j^{d_j}\right)^{7} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P^{-1+3\tilde{d}_m\theta+\delta}$$
$$\ll e_{0,m}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) \underbrace{P_m^{\frac{7}{5}-2}}_{\leqslant P_m^{-\delta}},$$

étant donné que $\left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{1+5d_j}\right) < P_m$ puisque l'on a supposé $\sum_{j=m+1}^r (1+5d_j)\frac{b_j}{b_m} < 1$, et que $P^{-1+3\tilde{d}^m\theta} \ll \left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{-\frac{3}{5}(1+5d_j)}\right) P_m^{\frac{3}{5}} \underbrace{P^{-1}}_{\leqslant P_m^{-2}}$. d'où le résultat. $\square$

4.4.3 Cas particulier

Nous allons ici traiter le cas particulier où $m = 1$ et $d_1 = 1$ (ce qui implique que la famille $\boldsymbol{t} = (t_{1,K})$ est telle que $t_{1,K} = 1$ si $K = 1$ et $t_{1,K} = 0$ sinon. Le polynôme F est alors du type :

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in J} A_k((x_i)_{i\in I_1}) x_k$$

où

$$J = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid a_{i,1} = 1\}.$$

Il est facile de se ramener au cas où $J = I_1$. Nous devons alors calculer le nombre de points à coordonnées bornées d'un réseau hyperplan : en effet on a pour $\boldsymbol{k} = (k_2, ..., k_r)$ fixé, et $(x_i)_{i\in I_1} \in \Phi_1(\boldsymbol{k})$

$$N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e}}(P_1) = \mathrm{Card}\Bigg\{(x_i)_{i\notin I_1} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r-s} \mid \sum_{k\in J} A_k((e_i,x_i)_{i\in I_1})e_kx_k = 0,$$
$$\forall j \in \{2,...,r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor = k_j,\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+1)}|\right\rfloor \leqslant P_1,$$
$$\forall i \notin I_1,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right)\left(\left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+1)}|\right\rfloor + 1\right)\Bigg\}.$$

Commençons par introduire la définition suivante :

Définition 4.4.13. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, et soit c un entier tel que $0 \leqslant c \leqslant d$. Pour $M \in \mathbf{N}$ et $L > 0$, on dit que S* appartient à $\mathrm{Lip}(n,c,M,L)$ *s'il existe M applications $\phi : [0,1]^{n-c} \to \mathbf{R}^d$ vérifiant :*

$$||\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})||_2 \leqslant L||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2,$$

$||.||_2$ désignant la norme euclidienne, telles que S soit recouvert par les images de ces applications.

On a le résultat suivant (cf. [M-V, Lemme 2]) :

Lemme 4.4.14. *Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble borné dont le bord ∂S appartient à* $\mathrm{Lip}(n,1,M,L)$*. L'ensemble S est alors mesurable et si Λ est un réseau de $\mathbf{R}^n$ de premier minimum successif λ_1, on a*

$$\left|\mathrm{card}(S\cap\Lambda) - \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\det(\Lambda)}\right| \leqslant c(n)M\left(\frac{L}{\lambda_1}+1\right)^{n-1},$$

où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de n.

Nous allons utiliser ce lemme pour évaluer, pour tout $k_1 \leqslant P_1$, le cardinal

$$N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e},k_1} = \mathrm{Card}\Bigg\{(x_i)_{i\notin I_1} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r-s}\ \Bigg|\ \sum_{k\in J} A_k((e_ix_i)_{i\in I_1})e_kx_k = 0,$$
$$\forall j \in \{2,...,r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor = k_j,\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+1)}|\right\rfloor \leqslant P_1,$$
$$\forall i \notin I_1,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right),\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+1)}|\right\rfloor \leqslant k_1\Bigg\}.$$

Notons $H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ l'hyperplan de $\mathbf{R}^{n+r-s}$ défini par

$$H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} = \{(x_i)_{i\notin I_1} \in \mathbf{R}^{n+r-s} \mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in J} A_k((e_ix_i)_{i\in I_1})e_kx_k\}.$$

On note par ailleurs $C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ le polytope convexe $\mathcal{B}_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ où

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} = \prod_{i\notin I_1} \left[-\frac{1}{e_i}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}, \frac{1}{e_i}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}} \right]$$

et $\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ le réseau $\mathbf{Z}^{n+r-s} \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$. Nous allons appliquer le lemme 4.4.14 à $S = k_1 C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ et $\Lambda = \Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ vus respectivement comme un sous-ensemble et un réseau de $H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ que l'on identifiera à $\mathbf{R}^{n+r-s+1}$. Nous allons pour cela montrer que le bord de S appartient à

$$\mathrm{Lip}(n+r-s, 1, (n+r-s-1)\prod_{i\notin I_1}\frac{2}{e_i}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}, k_1(n+r-s-2)\sqrt{n+r-s}).$$

Une face du polytope $C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ est obtenue en prenant l'intersection d'une face $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ avec $H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$. Considérons par exemple l'intersection (supposée non vide) de la face $\mathcal{F} = \{(x_i)_{i\notin I_1} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \mid x_{i_0} = \frac{1}{e_{i_0}}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i_0,j}}\}$ avec $H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$. La face $\mathcal{F}$ peut être subdivisée en $M_0 = \prod_{\substack{i\notin I_1\\ i\neq i_0}}\frac{2}{e_i}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}$ sous-faces $F_1, ..., F_{M_0}$ qui sont des cubes de taille 1 de centres notés $c_1, ..., c_{M_0}$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\forall k \in J,\ \alpha_k = A_k((e_i, x_i)_{i\in I_1})$$

de sorte que $H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ a pour équation

$$\sum_{k\in J}\alpha_k e_k x_k = 0$$

(les α_k étant non tous nuls). On peut par conséquent subdiviser chaque face $F_l \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$. Pour $l \in \{1, ..., M_0\}$ quelconque, on a pour tout $(x_i)_{i\in J} \in F_l \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$:

$$\alpha_{i_0}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i_0,j}} + \sum_{k\in J\setminus\{i_0\}}\alpha_k e_k x_k = 0$$

avec $\max_{k\in J\setminus\{i_0\}}|\alpha_k| \neq 0$ puisque l'intersection $F_l \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ est non vide. Posons alors

$$|\alpha_{k_0}| = \max_{k\in J\setminus\{i_0\}}|\alpha_k|,$$

et on a $z_{k_0} = -\frac{\alpha_{i_0}\prod_{j=2}^{r}(k_j+1)^{a_{i_0,j}}}{e_{k_0}\alpha_{k_0}} - \sum_{k\in J\setminus\{i_0,k_0\}}\frac{e_k\alpha_k}{e_{k_0}\alpha_{k_0}}x_k$, et on peut construire l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi_{F_l} : [0,1]^{n+r-s-2} & \to & H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \\ (t_k)_{k\in J\setminus\{i_0,k_0\}} & \mapsto & (x_k)_{k\in j} \end{array},$$

avec

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{e_{i_0}} \prod_{j=2}^r (k_j+1)^{a_{i_0,j}} & \text{si} \quad k = i_0 \\ -\frac{\alpha_{i_0} \prod_{j=2}^r (k_j+1)^{a_{i_0,j}}}{e_{k_0}\alpha_{k_0}} - \sum_{k \in J \setminus \{i_0,k_0\}} \frac{e_k \alpha_k}{e_{k_0}\alpha_{k_0}} x_k & \text{si} \quad k = k_0 \\ (\frac{1}{2} - t_k) + c_l & \text{si} \quad k \in J \setminus \{i_0, k_0\} \end{cases}$$

Il est alors clair que $F_l \cap H_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \subset \phi_{F_l}([0,1]^{n+r-s-2})$ et que

$$\begin{aligned} ||\phi_{F_l}(\boldsymbol{t}) - \phi_{F_l}(\boldsymbol{t'})||_2 &\leqslant \sqrt{n+r-s}||\phi_{F_l}(\boldsymbol{t}) - \phi_{F_l}(\boldsymbol{t'})||_\infty \\ &\leqslant \sqrt{n+r-s} \max\left(1, \sum_{k \in J\setminus\{i_0,k_0\}} \frac{|e_k\alpha_k|}{|e_{k_0}\alpha_{k_0}|}\right) ||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t'}||_\infty \\ &\leqslant (n+r-s-2)\sqrt{n+r-s}||\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t'}||_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien que le bord de $C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ appartient à :

$$\mathrm{Lip}(n+r-s, 1, (n+r-s-1)\prod_{i\notin I_1} \frac{2}{e_i} \prod_{j=2}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}, (n+r-s-2)\sqrt{n+r-s}),$$

et donc que le bord de $k_1 C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}$ appartient à

$$\mathrm{Lip}(n+r-s, 1, (n+r-s-1)\prod_{i\notin I_1} \frac{2}{e_i} \prod_{j=2}^r (k_j+1)^{a_{i,j}}, k_1(n+r-s-2)\sqrt{n+r-s}).$$

De plus puisque $\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \subset \mathbf{Z}^{n+r-s}$ le premier minimum successif de ce réseau est supérieur ou égal à 1. Ainsi, puisque

$$N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e},k_1} = \mathrm{card}(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}} \cap k_1 C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}) \tag{4.88}$$

le lemme 4.4.14 nous donne :

$$\begin{aligned} N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e},k_1} = &\, k_1^{n+r-s-1} \frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})} \\ &+ O_{n,r,s}\left(\left(\prod_{i\notin I_1} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^r k_j^{\sum_{i\notin I_1} a_{i,j}}\right) k_1^{n+r-s-2}\right), \end{aligned}$$

uniformément pour tout $(x_i)_{i\in I_1}$. Remarquons que

$$\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})} \ll \left(\prod_{i\notin I_1} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^r k_j^{\sum_{i\notin I_1} a_{i,j}}\right)$$

(car $\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}}) \geqslant 1$).

Nous pouvons alors en déduire que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\Bigg\{ & (x_i)_{i\notin I_m} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r-s} \mid \sum_{k\in J} A_k((e_ix_i)_{i\in I_1})x_k = 0, \\
& \forall j\in\{2,...,r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor = k_j, \\
& \forall i\notin I_1,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\left(\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\right),\ \left(\left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+1)}|\right\rfloor = k_1\right)\Bigg\} \\
&= N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e},k_1} - N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e},k_1-1} \\
&= \left(k_1^{n+r-s-1} - (k_1-1)^{n+r-s-1}\right)\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})} \\
&+ O_{n,r,s}\left(\left(\prod_{i\notin I_1} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=2}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_1} a_{i,j}}\right)\left(k_1^{n+r-s-2} - (k_1-1)^{n+r-s-2}\right)\right) \\
&= (n+r-s-1)k_1^{n+r-s-2}\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})} \\
&\quad + O_{n,r,s}\left(\left(\prod_{i\notin I_1} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=2}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_1} a_{i,j}}\right)k_1^{n+r-s-3}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant sur les $k_1 \leqslant P_1$ on obtient un résultat analogue à celui du corollaire 4.4.11 :

(4.89)

$$N_{(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{e}}(P_1) = \frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}P_1^{n+r-s-1} + O\left(\left(\prod_{i\notin I_1} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=2}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_1} a_{i,j}}\right)P_1^{n+r-s-2}\right),$$

uniformément pour tous $\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1},\boldsymbol{k}=(k_2,...,k_r)$. On peut en déduire, en sommant sur les $(x_i)_{i\in I_1}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{\boldsymbol{e},1}(P_1,...,P_r) &= \sum_{\boldsymbol{k}\mid k_j\leqslant P_j}\sum_{(x_i)_{i\in I_1}\in\phi_1(\boldsymbol{k})}\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}P_1^{n+r-s-1}\\ &\quad + O\left(\left(\prod_{i=1}^n e_i\right)^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\mid k_j\leqslant P_j}\left(\prod_{j=2}^r k_j^{n_j}\right)P_1^{n_1-2}\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\mid k_j\leqslant P_j}\sum_{(x_i)_{i\in I_1}\in\phi_1(\boldsymbol{k})}\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}P_1^{n+r-s-1}\\ &\quad + O\left(\left(\prod_{i=1}^n e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=2}^r P_j^{n_j+1}\right)P_1^{n_1-2}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on suppose $b_1 \geqslant \sum_{j=2}^r b_j(d_j+1)+\delta$, le terme d'erreur est alors du type $O\left((\prod_{i=1}^n e_i)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right)$. D'où le résultat ci-dessous qui est un équivalent du théorème 4.4.12 :

Théorème 4.4.15. *Si l'on suppose $P_1 \geqslant P_2 \geqslant ... \geqslant P_r$, $P_j = P_r^{b_j}$, $b_1 \geqslant \sum_{j=2}^r b_j(d_j+1)+\delta$, et $(m,d_1)=(1,1)$, alors on a :*

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_{\boldsymbol{e},1}(P_1,...,P_r) &= \sum_{\boldsymbol{k}\mid k_j\leqslant P_j}\sum_{(x_i)_{i\in I_1}\in\phi_1(\boldsymbol{k})}\frac{\mathrm{Vol}(C_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}{\det(\Lambda_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_1}})}P_1^{n+r-s-1}\\ &\quad + O\left(\left(\prod_{i=1}^n e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)\right).\end{aligned}$$

4.5 Troisième étape

Nous allons à présent utiliser les résultats obtenus dans les sections précédentes pour obtenir une formule asymptotique pour $N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)$ valable pour tous $P_1,...,P_r$. Plus précisément, nous allons montrer pour un ouvert U bien choisi (voir (4.98)) et une constante $\mathfrak{m}$ que nous préciserons (voir (4.93)), le théorème ci-dessous :

Théorème 4.5.1. *Si l'on suppose que $n+r>\mathfrak{m}$ alors*

On en déduit

$$\begin{aligned}(4.90)\quad N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) &= C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)\\ &\quad + O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right).\end{aligned}$$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ est tel que $P_{\sigma(1)} \geqslant P_{\sigma(2)} \geqslant ... \geqslant P_{\sigma(r)}$ nous poserons pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $P_{\sigma(j)} = P_{\sigma(r)}^{b_{\sigma,j}}$ avec $b_{\sigma,j} \geqslant 1$ (et $b_{\sigma,r} = 1$). Nous poserons alors $\boldsymbol{b}_\sigma = (b_{\sigma,1}, ..., b_{\sigma,r})$. Nous noterons également pour tout $(\sigma, m) \in \mathfrak{S}_r \times \{1, ..., r\}$:

$$I_{\sigma,m} = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid \forall j \in \{1, ..., m\},\ a_{i,\sigma(j)} = 0\}.$$

Fixons par ailleurs un ensemble de degrés $\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}$ en les variables $(x_i)_{i \neq I_{m,\sigma}}$ pour chaque $(\sigma, m) \in \mathfrak{S}_r \times \{1, ..., r-1\}$ et notons

$$\text{(4.91)} \quad \mathcal{A}^\lambda_{\sigma,m} = \Big\{(x_i)_{i \in I_{\sigma,m}} \mid \forall j_0 \in \{\sigma(1), ..., \sigma(m)\},\ \forall K_{j_0} \in \{1, ..., d_{j_0}\}, \\ \dim V^*_{\sigma,m,(x_i)_{i\in I_{\sigma,m}},\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)},(j_0,K_{j_0})} < \dim V^*_{\sigma,m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)},(j_0,K_{j_0})} - s + \lambda\Big\}$$

où l'on a posé

$$V^*_{\sigma,m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)},(j_0,K_{j_0})} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{C}} \mid \forall i \in J(j_0, K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\},$$

$$V^*_{\sigma,m,(x_i)_{i\in I_{\sigma,m}},\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)},(j_0,K_{j_0})} = \{\boldsymbol{x} \notin I_{\sigma,m} \mid \forall i \in J(j_0, K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\},$$

avec

$$J(j_0, K_{j_0}) = \{i \in \{1, ..., n+r\} \mid a_{i,j_0} = K_{j_0}\}.$$

Pour tout $(\sigma, m) \in \mathfrak{S}_r \times \{1, ..., r-1\}$, on note alors :

$$g^\sigma_m(\boldsymbol{b}_\sigma, \delta)) = \left(\frac{b_{\sigma,m} + \sum_{j=1}^m b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}}\right) 5\tilde{d}_{\sigma,m}\left(1 - \sum_{j=m+1}^r (1 + 5d_{\sigma(j)})\frac{b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}} - \delta\right)^{-1} \\ \left(\sum_{j=m+1}^r \left(1 + d_{\sigma(j)}\left(3 + \frac{\sum_{l=1}^m b_{\sigma,l}}{b_{\sigma,m} + \sum_{l=1}^m b_{\sigma,l}} + 2\varepsilon\right)\right)\frac{b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}} + 2\delta\right),$$

(pour $\sigma = \mathrm{Id}$, nous retrouvons $g^{\mathrm{Id}}_m = g_m$ où g_m a été défini par (4.85)),

$$h^\sigma_{m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}}((\boldsymbol{b}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_r}) = 2^{\sum_{j=1}^m D^{(\sigma,m)}_{\sigma(j)}}\Big(\frac{b_{\sigma,m} + 3\sum_{j=1}^m b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}}\tilde{d}_{\sigma,m} + g^\sigma_m(\boldsymbol{b}_\sigma, \delta)\Big) \\ + 4r \max_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\left(\sum_{j=1}^r b_{\tau,j}d_{\tau(j)} + \delta\right) + \max_{(j_0,K_{j_0})} \dim V^*_{\sigma,m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)},(j_0,K_{j_0})},$$

où $\tilde{d}_{\sigma,m} = (\sum_{j=1}^m d_{\sigma(j)}) - 1$, et

$$h^\sigma_{r,\boldsymbol{t}^{(\sigma,r)}}(\boldsymbol{b}_\sigma) = 2^{\sum_{j=1}^r D^{(\sigma,r)}_{\sigma(j)}} \max\Big\{\left(2 + 5\sum_{j=1}^r b_{\sigma,j}\right)\tilde{d}_\sigma, (2\delta+1)\sum_{j=1}^r b_{\sigma,j}d_{\sigma(j)}\Big\} \\ + \max_{(j_0,K_{j_0})} \dim V^*_{\sigma,\boldsymbol{t}^{(r,\sigma)},(j_0,K_{j_0})}.$$

On pose alors

$$h_{(\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)})_{(\sigma,m)\in\mathfrak{S}_r\times\{1,\ldots,r\}}}((\boldsymbol{b}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_r}) = \max_{m\in\{1,\ldots,r\}} h^{\sigma}_{m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}}((\boldsymbol{b}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_r}).$$

et on considère $(\tilde{\boldsymbol{b}}_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} = (\tilde{b}_{\sigma,1}, ..., \tilde{b}_{\sigma,r})_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}$ les réels $\tilde{b}_{\sigma,j}$ minimisant la fonction $h_{(\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)})_{(\sigma,m)\in\mathfrak{S}_r\times\{1,\ldots,r\}}}$ sur le domaine défini par :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r,\;\; b_{\sigma,1}\geqslant ...\geqslant b_{\sigma,r-1}\geqslant b_{\sigma,r}=1,$$

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r,\;\;\forall m\in\{1,...,r-1\},\;\;\sum_{j=m+1}^{r}(1+5d_{\sigma(j)})\frac{b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}}<1. \tag{4.92}$$

On pose alors

$$\mathfrak{m} = h_{(\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)})_{(\sigma,m)\in\mathfrak{S}_r\times\{1,\ldots,r\}}}\left((\tilde{\boldsymbol{b}}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\right). \tag{4.93}$$

On choisit alors

$$\lambda = 4r\max_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\left\lceil\sum_{j=1}^{r}\tilde{b}_{\sigma,j}d_{\sigma(j)}+\delta\right\rceil. \tag{4.94}$$

Remarquons qu'il est possible de majorer $\mathfrak{m}$ par un réel plus simple :

Lemme 4.5.2. *On a que*

$$\mathfrak{m}\leqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^{r}d_j}+4)\left(\prod_{j=1}^{r}(3+10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{r}d_j\right)+\max_{\substack{m\in\{1,\ldots,r\}\\ \sigma\in\mathfrak{S}_r}}\max_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}}\dim V^*_{\sigma,m,\boldsymbol{d},(j,k)}.$$

Démonstration. Choisissons $(b_{\sigma,j})_{\substack{j\in\{1,\ldots,r-1\}\\ \sigma\in\mathfrak{S}_r}}$ tels que pour tout $(m,\sigma)\in\{1,...,r\}\times\mathfrak{S}_r$:

$$\sum_{j=m+1}^{r}(1+5d_{\sigma(j)})\frac{b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}}=\frac{1}{2}.$$

Ceci est possible si et seulement si pour tout (m,σ) :

$$b_{\sigma,m}=(2+10d_{\sigma(r)})\prod_{j=m+1}^{r-1}(3+10d_{\sigma(j)}),$$

donc en particulier, pour tous $j<m$:

$$b_{\sigma,m}=b_{\sigma,j}\prod_{k=j}^{m}(3+10d_{\sigma(k)}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{b_{\sigma,m}+\sum_{j=1}^{m} b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}} &= 2+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m}(3+10d_{\sigma(k)})\\ &\leqslant m\prod_{j=1}^{m}(3+10d_{\sigma(k)})\end{aligned}$$

ainsi que

$$\frac{b_{\sigma,m}+3\sum_{j=1}^{m} b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}} \leqslant 3m\prod_{j=1}^{m}(3+10d_{\sigma(k)}).$$

On remarque enfin que pour $\delta>0$ choisi assez petit :

$$\begin{aligned}\sum_{j=m+1}^{r}\left(1+d_{\sigma(j)}\left(3+\frac{\sum_{l=1}^{m} b_{\sigma,l}}{b_{\sigma,m}+\sum_{l=1}^{m} b_{\sigma,l}}+2\varepsilon\right)\right)\frac{b_{\sigma,j}}{b_{\sigma,m}}+2\delta&\\ \leqslant \sum_{j=m+1}^{r}(1+4d_{\sigma(j)})\frac{b_j}{b_m}\leqslant \frac{1}{2}-\delta&\end{aligned}$$

Ainsi :

$$g_m^{\sigma}(\boldsymbol{b}_\sigma,\delta)\leqslant 5m\tilde{d}_{\sigma,m}\prod_{j=1}^{m}(3+10d_{\sigma(j)}).$$

Par ailleurs, on a que, pour tout $\tau\in\mathfrak{S}_r$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} b_{\tau,j}d_{\tau(j)}+\delta &\leqslant d_{\tau(r)}+\sum_{m=1}^{r-1}(2+10d_{\tau(r)})d_{\tau(m)}\prod_{j=m+1}^{r-1}(3+10d_{\tau(j)})\\ &\leqslant (2+10d_{\tau(r)})\sum_{m=1}^{r}d_{\tau(m)}\prod_{j=m+1}^{r-1}(3+10d_{\tau(j)})\\ &\leqslant \left(\prod_{j=1}^{r}(3+10d_{\tau(j)})\right)(\sum_{m=1}^{r}d_{\tau(m)})\\ &\leqslant \left(\prod_{j=1}^{r}(3+10d_{\tau(j)})\right)(\sum_{m=1}^{r}d_{\tau(m)}).\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{r} D_{\sigma(j)}^{(\sigma,m)}\leqslant\sum_{j=1}^{r} d_j.$$

Nous déduisons de ces calculs que pour tous (m,σ)

$$h^{\sigma}_{m,\boldsymbol{t}^{(\sigma,m)}}((\boldsymbol{b}_\tau)_{\tau\in\mathfrak{S}_r})$$
$$\leqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j}+4)\left(\prod_{j=1}^r(3+10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^r d_j\right)+\dim V^*_{m,\sigma,\boldsymbol{d},(j,k)}.$$

□

À partir d'ici, on supposera, sauf indication contraire, que $P_1\geqslant P_2\geqslant \ldots\geqslant P_r$ (les autres cas se traitant de la même manière). Pour simplifier les notations nous noterons $b_1=b_{\mathrm{Id},1},\ldots,b_r=b_{\mathrm{Id},r}$, $\tilde{b}_1=\tilde{b}_{\mathrm{Id},1},\ldots,\tilde{b}_r=\tilde{b}_{\mathrm{Id},r}$ et $\boldsymbol{t}^{(m)}=\boldsymbol{t}^{(\mathrm{Id},m)}$. L'objectif de ce qui va suivre est de donner trouver une formule asymptotique pour $N_{\boldsymbol{e}}(P_1,\ldots,P_r)$ valable pour tous $P_1,\ldots,P_r$ tels que $P_1\geqslant P_2\geqslant\ldots\geqslant P_r$.

Commençons par démontrer le résultat ci-dessous qui s'avérera utile pour la suite :

Proposition 4.5.3. *Avec les notations de la section précédente, l'ensemble $\mathcal{A}_m^\lambda$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}^s_{\mathbf{C}}$, et on a de plus que*

$$\dim(\mathcal{A}_m^\lambda)^c\leqslant\max\{0,s-\lambda\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour (j_0,K_{j_0}) fixé quelconque, l'ensemble

$$\mathcal{A}^{\lambda,c}_{m,(j_0,K_{j_0})}=\left\{(x_i)_{i\in I_m}\mid \dim V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}\geqslant\dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}-s+\lambda\right\}$$

est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^s_{\mathbf{C}}$ de dimension inférieure ou égale à $s-\lambda$.

Considérons le sous-réseau N' de $\mathbf{Z}^n$ défini par

$$N'=\bigoplus_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\notin I_m}}\mathbf{Z}v_i.$$

Par définition de I_m, on a que, pour tout $j\in\{1,\ldots,m\}$,

$$v_{n+j}=-\sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\notin I_m}}a_{i,j}v_i.$$

On considère alors l'éventail Δ' de $N'_{\mathbf{R}}=\bigoplus_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\notin I_m}}\mathbf{R}v_i$ défini par les cônes $(\sigma\cap N'_{\mathbf{R}})_{\sigma\in\Delta}$. Cet éventail a alors pour arêtes $(\mathbf{R}^+v_i)_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\notin I_m}}$ et $(\mathbf{R}^+v_{n+j})_{j\in\{1,\ldots,m\}}$. Notons alors X_m la variété torique (complète et lisse) définie par N' et Δ'. Cette variété est de dimension $n+r-s-m$. Remarquons que cette variété est en fait isomorphe à l'adhérence des orbites d'un point de l'orbite ouverte de X sous l'action d'un sous-tore T_m (de dimension $n+r-s-m$) du tore T de X.

Notons $Y_{(j_0,K_{j_0})}$ le fermé de $\mathbf{A}^s_{\mathbf{C}} \times X_m(\mathbf{C})$ défini par

$$Y_{(j_0,K_{j_0})} = \{((x_i)_{i\in I_m},(x_i)_{i\notin I_m}) \in \mathbf{A}^s_{\mathbf{C}} \times X_m(\mathbf{C}) \mid \forall i \in J(j_0,K_{j_0}),\ \frac{\partial F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

La projection canonique $\pi : Y_{(j_0,K_{j_0})} \subset \mathbf{A}^s_{\mathbf{C}} \times X_m(\mathbf{C}) \to \mathbf{A}^s_{\mathbf{C}}$ est un morphisme projectif donc fermé. Par conséquent, d'après [G-D, Corollaire 13.1.5],

$$\{(x_i)_{i\in I_m} \in \mathbf{A}^s_{\mathbf{C}} \mid \dim \underbrace{Y_{(j_0,K_{j_0}),(x_i)_{i\in I_m}}}_{=\pi^{-1}((x_i)_{i\in I_m}} \geqslant \dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - s + \lambda - m\}$$

est un fermé, et puisque $\dim Y_{(j_0,K_{j_0}),(x_i)_{i\in I_m}} = \dim V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t},(j_0,K_{j_0})} - m$, on trouve bien que $\mathcal{A}^\lambda_{m,(j_0,K_{j_0})}$ est un fermé de Zariski.

Remarquons à présent que d'une part, X_m est le quotient d'un ouvert U_m de $\mathbf{A}^{n+r-s}$ par l'action d'un tore de dimension m. Par conséquent

$$\dim Y_{(j_0,K_{j_0})} = \dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - m.$$

D'autre part,

$$Y_{(j_0,K_{j_0})} \cap (\mathcal{A}^{\lambda,c}_{m,(j_0,K_{j_0})} \times X_m(\mathbf{C})) = \bigsqcup_{(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}^{\lambda,c}_{m,(j_0,K_{j_0})}} \pi^{-1}((x_i)_{i\in I_m}),$$

et on a alors que

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}^{\lambda,c}_{m,(j_0,K_{j_0})}) + \dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - s + \lambda - m &\leqslant \dim Y_{(j_0,K_{j_0})} \\ &= \dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})} - m,\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\dim \mathcal{A}^{\lambda,c}_{m,(j_0,K_{j_0})} \leqslant s - \lambda,$$

d'où le résultat.

□

Remarque 4.5.4. *On peut montrer de façon analogue que la même propriété est vraie pour tous les* $\mathcal{A}^\lambda_{m,\sigma}$.

Nous aurons également besoin du lemme ci-dessous :

Lemme 4.5.5. *Si l'on considère $J \subset \{1, ..., n+r\}$ de cardinal noté t, et si F est un fermé de l'espace affine $\mathbf{A}^t_{\mathbf{C}} = \{(x_i)_{i\in J}\}$ tel que $\dim F \leqslant t - \alpha$ (pour $\alpha \in \mathbf{N}$), on a alors*

$$\mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in J} \in F \cap \mathbf{Z}^J \mid \forall i \in J,\ |x_i| \leqslant T_i\} \ll \left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{\sum_{i\in J} a_{i,j}}\right) P_{j_0}^{-\frac{\alpha}{2}},$$

(la constante implicite ne dépendant que du degré de F) où

$$j_0 = \min\{j \in \{1, ..., r\} \mid \forall i \in J,\ \exists l \leqslant j \mid a_{i,l} \neq 0\}.$$

Démonstration. En utilisant par exemple la démonstration de [Br, Théorème 3.1]), on montre que (en remarquant que, pour tout $i \in J$, $T_i \geqslant P_{j_0}$) :

$$\mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in J} \in F \cap \mathbf{Z}^J \mid \forall i \in J,\ |x_i| \leqslant T_i\} \ll \max_{i_1,...,i_{t-\alpha}\in J} \prod_{l=1}^{t-\alpha} T_{i_l}$$
$$\sum_{i_1,...,i_\alpha \in J} \left(\prod_{i\in J} T_i\right)\left(\prod_{l=1}^{\alpha} T_{i_l}\right)^{-1}$$
$$\ll \sum_{i_1,...,i_\alpha\in J} \left(\prod_{l\in\{i_1,...,i_\alpha\}} e_l\right)\left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{\sum_{i\in J} a_{i,j}}\right) P_{j_0}^{-\alpha}.$$

Si l'on suppose que $\sum_{i_1,...,i_\alpha\in J}\left(\prod_{l\in\{i_1,...,i_\alpha\}} e_l\right) \ll \left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_{j_0}^{\frac{\alpha}{2}}$ ce terme peut être majoré par :

$$\left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{\sum_{i\in J} a_{i,j}}\right) P_r^{-\alpha/2}.$$

Si au contraire $\sum_{i_1,...,i_\alpha\in J}\left(\prod_{l\in\{i_1,...,i_\alpha\}} e_l\right) \gg \left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_{j_0}^{\frac{\alpha}{2}}$ on a alors que $\left(\prod_{i\in J} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_{j_0}^{-\frac{\alpha}{2}} \gg 1$ et on obtient trivialement la même majoration. D'où le résultat. □

Démontrons le résultat suivant :

Lemme 4.5.6. *On suppose que $n + r > \mathfrak{m}$. On a alors*

$$\sum_{k_r\leqslant P_r}\left(\sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_{r-1}(k_r)} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_{r-1}},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_{r-1}},\boldsymbol{k}}\right)\left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i\right)^{-1} k_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}}$$
$$= C_{\sigma,\boldsymbol{e}} P_r^{n_r-d_r} + O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right) P_r^{n_r-d_r-\delta}\right).$$

Démonstration. On choisit $P_1, ..., P_{r-1}$ tels que $b_j = \tilde{b}_j$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. On a par définition de K_{r-1} :

$$K_{r-1} = (n + r - \lambda - \max_{(j_0,K_{j_0})} \dim V^*_{r-1,\boldsymbol{t}^{(r-1)},(j_0,K_{j_0})} - \varepsilon)/2^{\sum_{j=1}^{r-1} D_j^{(r-1)}}.$$

La condition $n + r > \mathfrak{m} \geqslant h_{r-1,\boldsymbol{t}^{(r-1)}}(\boldsymbol{b}, (\tilde{\boldsymbol{b}}_\sigma)_{\sigma\neq \mathrm{Id}})$ implique alors (par définition de $h_{r-1,\boldsymbol{t}^{(r-1)}}$) que

$$K_{r-1} - \frac{b_{r-1} + 3\sum_{j=1}^{r-1} b_j}{b_{r-1}} \tilde{d}_{r-1} > g_{r-1}(\boldsymbol{b}, \delta),$$

et nous pouvons alors appliquer le théorème 4.4.12, ce qui nous donne :

(4.95)

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1, ..., P_r) = \sum_{k_r \leqslant P_r} \left(\sum_{(x_i)_{i\in I_m} \in \Phi_{r-1}(k_r)} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_{r-1}},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_{r-1}},k_r} \right) \left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i \right)^{-1} k_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}} \left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j - d_j} \right) + O\left(\left(e_{0,r-1}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j} \right) P_{r-1}^{-\delta} \right).$$

En observant par ailleurs que $n+r > \mathfrak{m} \geqslant h_{r,\boldsymbol{t}^{(r)}}(\boldsymbol{b})$ implique $K > \max\{(5\sum_{j=1}^r b_j + 2)\tilde{d}, (2\delta + 1)\sum_{j=1}^r b_j d_j\}$, on donc appliquer le théorème 4.3.27 et on a :

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j} \right) + O\left(\left(e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j-\delta} \right) \right). \tag{4.96}$$

D'autre part, on observe que :

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = \tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1, ..., P_r) + O\left(\sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_{r-1}} \in (\mathcal{A}^\lambda_{r-1})^c \cap \mathbf{Z}^s \\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i} P_r^{a_{i,r}}}} \left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j} \right) P_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}} \right).$$

En utilisant le lemme 4.5.5, on remarque que le terme d'erreur de la formule ci-dessus peut être majoré par

$$\left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j}\right) P_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}}\left(\prod_{i\in I_{r-1}} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} P_r^{\sum_{i\in I_{r-1}} a_{i,r}} P_r^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned}N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) &= \tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1,...,P_r) + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-\lambda/2}\right)\\ &= \tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1,...,P_r) + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta}\right),\end{aligned}$$

puisque $\lambda \geqslant 2r\lceil\sum_{j=1}^{r} b_j d_j+\delta\rceil$. En remplaçant $N_{\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)$ et $\tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1,...,P_r)$ par leurs expressions dans (4.95), (4.96) et en simplifiant par $\left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j-d_j}\right)$, on obtient le résultat du lemme (qui ne dépend plus des valeurs de $P_1,...,P_{r-1}$ choisies). □

Nous sommes alors en mesure de démontrer le résultat suivant :

Lemme 4.5.7. *Si l'on suppose que $n+r>\mathfrak{m}$ et que $\frac{b_j}{b_{r-1}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}$ pour tout $j\in\{1,...,r\}$ (en particulier $\frac{1}{b_{r-1}} \leqslant \frac{1}{\tilde{b}_{r-1}}$) nous avons alors la formule asymptotique :*

$$\begin{aligned}(4.97)\quad \tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1,...,P_r) &= C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right)\\ &+ O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque $\frac{b_j}{b_{r-1}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, on a

$$g_{r-1}(\boldsymbol{b}, \delta) = \left(\frac{b_{r-1} + \sum_{j=1}^{r-1} b_j}{b_{r-1}}\right) 5\tilde{d}_{r-1} \left(1 - (1+5d_r)\frac{1}{b_{r-1}} - \delta\right)^{-1}$$
$$\left(\left(1 + d_r\left(3 + \frac{\sum_{l=1}^{r-1} b_l}{b_{r-1} + \sum_{l=1}^{r-1} b_l} + 2\varepsilon\right)\right)\frac{1}{b_{r-1}} + 2\delta\right)$$
$$= 5\tilde{d}_{r-1}\left(1 - (1+5d_r)\frac{1}{b_{r-1}} - \delta\right)^{-1}$$
$$\left((2\delta + \frac{1 + (3+2\varepsilon)d_r}{b_{r-1}})\left(1 + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{b_j}{b_{r-1}}\right) + \frac{d_r}{b_{r-1}}\frac{\sum_{l=1}^{r-1} b_l}{b_{r-1}}\right)$$
$$\leqslant 5\tilde{d}_{r-1}\left(1 - (1+5d_r)\frac{1}{\tilde{b}_{r-1}} - \delta\right)^{-1}$$
$$\left((2\delta + \frac{1 + (3+2\varepsilon)d_r}{\tilde{b}_{r-1}})\left(1 + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}\right) + \frac{d_r}{\tilde{b}_{r-1}}\frac{\sum_{l=1}^{r-1} \tilde{b}_l}{\tilde{b}_{r-1}}\right) = g_{r-1}(\tilde{\boldsymbol{b}}, \delta)$$

où $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_{r-1})$. Par conséquent, puisque $n+r > h_{r-1,\boldsymbol{t}^{(r-1)}}(\tilde{\boldsymbol{b}}, (\tilde{\boldsymbol{b}}_\tau)_{\tau\neq \mathrm{Id}})$, on a

$$K_{r-1} = (n + r - \lambda - \max_{(j_0,K_{j_0})} \dim V^*_{r-1,\boldsymbol{t}^{(r-1)},(j_0,K_{j_0})} - \varepsilon)/2^{\sum_{j=1}^{r-1} D_j^{(r-1)}}$$
$$> \left(1 + 3\sum_{j=1}^{r-1}\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}\right)\tilde{d}_{r-1} + g_{r-1}(\tilde{\boldsymbol{b}}, \delta)$$
$$> \left(1 + 3\sum_{j=1}^{r-1}\frac{b_j}{b_{r-1}}\right)\tilde{d}_{r-1} + g_{r-1}(\boldsymbol{b}, \delta),$$

et puisque, d'après la formule (4.92)

$$(1+5d_r)\frac{b_r}{b_{r-1}} \leqslant (1+5d_r)\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{b}_{r-1}} < 1,$$

nous pouvons donc appliquer le théorème 4.4.12 qui, combiné avec le lemme précédent, donne :

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1, ..., P_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j}\right)$$
$$+ O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right).$$

$\square$

Définissons à présent l'ouvert U de $\mathbf{A}^{n+r}$ par :

$$U = \bigcap_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\bigcap_{m\in\{1,...,r-1\}}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{C}} \mid (x_i)_{i\in I_{m,\sigma}}\in\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\sigma}\}. \tag{4.98}$$

Lemme 4.5.8. *L'ouvert U vérifie la propriété suivante :*

$$\forall\boldsymbol{x}\in X_1,\ \ (\boldsymbol{x}\in U)\Rightarrow(\forall\boldsymbol{s}=(s_1,...,s_r)\in(\mathbf{C}^*)^r,\ \boldsymbol{s}.\boldsymbol{x}\in U).$$

Démonstration. Par symétrie il nous suffit de montrer que, pour tout m :

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{C}} \mid (x_i)_{i\in I_{m,\sigma}}\in\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\sigma}\}$$

est stable par l'action de $(\mathbf{C}^*)^r$. Considérons donc un élément $\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{C}}$ tel que $(x_i)_{i\in I_{m,\sigma}}\in\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\sigma}$. Rappelons que par définition $\mathcal{A}^{\lambda}_{m}$ est l'ensemble

$$\left\{(x_i)_{i\in I_m}\mid\forall(j_0,K_{j_0}),\ \dim V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}<\dim V^*_{m,\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}-s+\lambda\right\}.$$

Considérons à présent un élément $\boldsymbol{s}=(s_1,...,s_r)\in(\mathbf{C}^*)^r$, et remarquons que l'application $(x_i)_{i\in I_m}\mapsto((\prod_{j=m+1}^r s_j^{a_{i,j}})x_i)_{i\in I_m}$ réalise un isomorphisme de $V^*_{m,((\prod_{j=m+1}^r s_j^{a_{i,j}})x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}$ sur $V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}$. On a donc

$$\dim V^*_{m,((\prod_{j=1}^r s_j^{a_{i,j}})x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})}=\dim V^*_{m,(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{t}^{(m)},(j_0,K_{j_0})},$$

et donc que $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}^{n+r}_{\mathbf{C}}\mid(x_i)_{i\in I_{m,\sigma}}\in\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\sigma}\}$ est stable par l'action de $\boldsymbol{s}\in(\mathbf{C}^*)^r$. □

En notant

$$\begin{aligned}N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)=\operatorname{Card}\big\{&\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r}\cap U\mid F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})=0,\\&\forall j\in\{1,...,r\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor\leqslant P_j,\ \forall i\in\{1,...,n+r\},\\&|x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1)^{a_{i,j}}\Bigg\},\end{aligned}\tag{4.99}$$

on déduit du lemme précédent le résultat ci-dessous :

Lemme 4.5.9. *Si l'on suppose que $n+r>\mathfrak{m}$ et que $\frac{b_j}{b_{r-1}}\leqslant\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}$ pour tout $j\in\{1,...,r\}$ nous avons alors :*

$$\begin{aligned}N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)&=C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)\\&+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right).\end{aligned}\tag{4.100}$$

Démonstration. On observe que

$$N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r) = \tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}(P_1,...,P_r) + O\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\sum_{m\in\{1,...,r-1\}} T_{m,\tau}\right),$$

où

(4.101)

$$\begin{aligned}T_{m,\tau} = \mathrm{Card}\Big\{&\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \mid (x_i)_{i\in I_{r-1}}\in\mathcal{A}^{\lambda}_{r-1},\ (x_i)_{i\in I_{m,\tau}}\notin\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\tau},\\ &F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})=0,\ \forall j\in\{1,...,r\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor \leqslant P_j,\\ &\forall i\in\{1,...,n+r\},\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1)^{a_{i,j}}\Big\}.\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, posons $\mathcal{F}=(\mathcal{A}^{\lambda}_{m,\tau})^c$ et $s=\mathrm{Card}\, I_{m,\tau}$. Comme nous l'avons vu avec le lemme 4.5.3, on a alors $\dim\mathcal{F}\leqslant s-\lambda$. Posons par ailleurs $J=I_{r-1}\cap I_{m,\tau}$, $t=\mathrm{Card}\, J$, et pour tout $(x_i)_{i\in J}$ fixé :

$$\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}}=\{(x_i)_{i\in I_{m,\tau}\setminus J}\mid (x_i)_{i\in I_{m,\tau}}\in\mathcal{F}\},$$

de sorte que

$$\mathcal{F}=\bigsqcup_{(x_i)_{i\in J}}\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}}.$$

Notons

$$\mathcal{S}_1=\{(x_i)_{i\in J}\mid \dim\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}}>s-t-\frac{\lambda}{2}\},$$

$$\mathcal{S}_2=\{(x_i)_{i\in J}\mid \dim\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}}\leqslant s-t-\frac{\lambda}{2}\},$$

(on a alors que $\dim\mathcal{S}_1\leqslant t-\frac{\lambda}{2}$) et en notant

$$\begin{aligned}M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r)=\mathrm{Card}\{&(x_i)_{i\in\{1,...,n+r\}\setminus J}\mid (x_i)_{i\in I_{m,\tau}\setminus J}\in\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}},\\ &\forall i\in\{1,...,n+r\}\setminus J\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}P_j^{a_{i,j}}\ \text{ et }\ F(\boldsymbol{x})=0\},\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}T_{m,\tau}\ll &\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r)\\ &+\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r).\end{aligned}$$

On observe alors que, en appliquant le lemme 4.5.5 aux fermés $\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J}}$ (de dimension inférieure à $s-t-\lambda/2$ lorsque $(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2$),

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r) &\ll \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} \left(\prod_{i\notin J} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{\sum_{i\notin J} a_{i,j}}\right) P_{r-1}^{-\lambda/4} \\ &\ll \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} \left(\prod_{i\notin J} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j}\right) P_r^{\sum_{i\notin J} a_{i,r}} P_{r-1}^{-\lambda/4} \\ &\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P_{r-1}^{-\lambda/4}.\end{aligned}$$

Or, on remarque que (puisque $\frac{b_j}{b_{r-1}}\leqslant\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{r-1}}$) :

$$P_{r-1}^{-\lambda/4} = P_r^{-b_{r-1}\lambda/4} \leqslant P_r^{-4rb_{r-1}(\sum_{j=1}^r \tilde{b}_j d_j+\delta)/4} \leqslant P_r^{-\sum_{j=1}^r b_j d_j-\delta} = \left(\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j}\right) P_r^{-\delta}.$$

Par conséquent

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_2\\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r) \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta}.$$

Par ailleurs, pour tous $(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1$ et $(x_i)_{i\in I_{r-1}\setminus J}$ fixés vérifiant $(x_i)_{i\in I_{r-1}}\in\mathcal{A}_{r-1}^{\lambda}$ et $|x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}$, par des arguments analogues à ceux utilisés pour établir le théorème 4.4.12, et en utilisant les majoration de $\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_{r-1}},\mathbf{e}}$ et $J_{(e_i,x_i)_{i\in I_{r-1}}}$ données dans les lemmes 4.4.9 et 4.4.7, on montre qu'il existe

$\eta \in [0,1]$ tel que, pour tout $(x_i)_{i\in I_{r-1}}$ fixé :

$$
\begin{aligned}
(4.102)\quad & \mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in\{1,\dots,n+r\}\setminus I_{r-1}} \mid (x_i)_{i\in I_{m',\tau}\setminus J} \in F_{(x_i)_{i\in J}}, \\
& \qquad \forall i \in \{1,\dots,n+r\}\setminus I_{r-1},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}} \text{ et } F(\boldsymbol{x})=0\} \\
& \ll \mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in\{1,\dots,n+r\}\setminus I_{r-1}} \mid \forall i \notin I_{r-1},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}} \text{ et } F(\boldsymbol{x})=0\} \\
& \ll e_0^2\left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}+4d_r+\eta} \\
& \qquad + \left(\prod_{i\notin I_{r-1}} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{r-1} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{\sum_{i\notin I_{r-1}} a_{i,r}-d_r-\delta}
\end{aligned}
$$

Si l'on suppose $\left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/4} \leqslant 1$, en rappelant que $\dim \mathcal{S}_1 \leqslant t-\frac{\lambda}{2}$, on a, d'après le lemme 4.5.5

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1 \mid \forall i \in J,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}}\} \\
& \ll \left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/4} \ll \left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{-\frac{3}{4}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/8},
\end{aligned}
$$

(car on a supposé $\left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/4} \leqslant 1$).
Si $\left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{\frac{1}{2}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/4} \geqslant 1$, par une estimation triviale on trouve encore

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Card}\{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1 \mid \forall i \in J,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r} P_j^{a_{i,j}}\} \\
& \ll \left(\prod_{i\in J} T_i\right) \ll \left(\prod_{i\in J} T_i\right)\left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{\frac{1}{4}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/8} \\
& \qquad = \left(\prod_i^{n+1} e_i\right)^{-\frac{3}{4}} P_r^{\sum_{i\in J} a_{i,r}} P_r^{-\lambda/8}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, en sommant (4.102) sur l'ensemble des $(x_i)_{i\in I_{r-1}}$ considérés, on obtient alors

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r)$$
$$\ll e_0^2\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{3}{4}} P_r^{-\lambda/8}\left(\prod_{j=1}^{r-1}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{n_r+4d_r+\eta}$$
$$+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}.$$

Or, on a, par définition de λ (cf. formule (4.94)) :

$$P_r^{n_r+4d_r+\eta-\frac{\lambda}{8}} \ll P_r^{n_r-d_r-\delta},$$

et par ailleurs :

$$e_0^2\left(\prod_{i\notin J}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{i\in J}e_i\right)^{-\frac{3}{4}} \ll \max\{e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1},\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Donc finalement,

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J}\in\mathcal{S}_1\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J}}(P_1,...,P_r)$$
$$\ll \left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}.$$

Ainsi, nous avons établi que pour tout $(m,\tau)\in\{1,...,r-1\}\times\mathfrak{S}_r$,

$$T_{m,\tau} \ll \left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}.$$

D'où le résultat. $\square$

Nous allons à présent démontrer, par récurrence, une généralisation des lemmes 4.5.6, 4.5.7 et 4.5.9.

Théorème 4.5.10. *Si l'on suppose que $n+r>\mathfrak{m}$ et que pour un $m\in\{1,...,r-1\}$ fixé $\frac{b_j}{b_m}\leqslant\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_m}$ pour tout $j\in\{1,...,r\}$, alors :*

1. *On a d'une part*

$$\sum_{\substack{k_j\leqslant P_j\\ \forall j\in\{1,...,m\}}}\ \sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})}\mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r}k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)$$
$$=C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=m+1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)\right).\tag{4.103}$$

2. *D'autre part*

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1,...,P_r)=C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right).\tag{4.104}$$

3. *On en déduit*

$$N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)=C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right).\tag{4.105}$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence descendante sur $m\in\{1,...,r-1\}$. Le cas $m=r-1$ a déjà été traité (cf. lemmes 4.5.6, 4.5.7 et 4.5.9). Supposons que les résultats 1, 2 et 3 sont vérifés au rang m, et montrons alors qu'ils le sont au rang $m-1$.

Étape 1 : Dans cette étape, nous allons établir le résultat 1 au rang $m-1$. Pour cela, fixons, pour toute cette étape, $b_1,...,b_{m-1}$ tels que $\frac{b_1}{\tilde{b}_1}=...=\frac{b_{m-1}}{\tilde{b}_{m-1}}$ (avec b_{m-1} fixé quelconque) et considérons $b_m,...,b_r$ vérifiant $\frac{b_j}{b_{m-1}}\leqslant\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}}$.

On a alors, puisque $\frac{b_j}{b_{m-1}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}}$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$:

$$g_{m-1}(\boldsymbol{b}, \delta) = \left(\frac{b_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j}{b_{m-1}} \right) 5\tilde{d}_{m-1} \left(1 - \sum_{j=m}^{r} (1 + 5d_j) \frac{b_j}{b_{m-1}} - \delta \right)^{-1}$$
$$\left(\sum_{j=m}^{r} \left(1 + d_j \left(3 + \frac{\sum_{l=1}^{m-1} b_l}{b_{m-1} + \sum_{l=1}^{m-1} b_l} + 2\varepsilon \right) \right) \frac{b_j}{b_{m-1}} + 2\delta \right)$$
$$= 5\tilde{d}_{m-1} \left(1 - \sum_{j=m}^{r} (1 + 5d_j) \frac{b_j}{b_{m-1}} - \delta \right)^{-1}$$
$$\left(\sum_{j=m}^{r} \left(2\delta + \frac{(1 + (3 + 2\varepsilon)d_j)b_j}{b_{m-1}}) \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_j}{b_{m-1}} \right) + d_j \frac{b_j}{b_{m-1}} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{b_l}{b_{m-1}} \right)$$
$$\leqslant 5\tilde{d}_{m-1} \left(1 - \sum_{j=m}^{r} (1 + 5d_j) \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}} - \delta \right)^{-1}$$
$$\left(\sum_{j=m}^{r} \left(2\delta + \frac{(1 + (3 + 2\varepsilon)d_j)\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}}) \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}} \right) + d_j \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\tilde{b}_l}{\tilde{b}_{m-1}} \right)$$
$$= g_{m-1}(\tilde{\boldsymbol{b}}, \delta).$$

Ainsi, on a que (puisque $n + r > \mathfrak{m} \geqslant h^{\mathrm{Id}}_{m-1,\boldsymbol{t}^{(m-1)}}(\boldsymbol{b}, (\tilde{\boldsymbol{b}}_\tau)_{\tau \neq \mathrm{Id}})$)

$$\begin{aligned} K_{m-1} &= (n + r - \lambda - \max_{(j_0, K_{j_0})} \dim V^*_{m-1,\boldsymbol{t}^{(m-1)},(j_0,K_{j_0})} - \varepsilon)/2^{\sum_{j=1}^{m-1} D_j} \\ &> \left(1 + 3 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}} \right) \tilde{d}_{m-1} + g_{m-1}(\tilde{\boldsymbol{b}}, \delta) \\ &> \left(1 + 3 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_j}{b_{m-1}} \right) \tilde{d}_{m-1} + g_{m-1}(\boldsymbol{b}, \delta). \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque

$$\sum_{j=m}^{r} (1 + 5d_j) \frac{b_j}{b_{m-1}} \leqslant \sum_{j=m}^{r} (1 + 5d_j) \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}} < 1,$$

on peut appliquer le théorème 4.4.12 et on obtient la formule asymptotique

(4.106)

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m-1}(P_1,...,P_r) = \sum_{\forall j\in\{m,...,r\},\, k_j\leqslant P_j} \left(\sum_{(x_i)_{i\in I_{m-1}}\in\Phi_{m-1}(\boldsymbol{k})} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_{m-1}},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_{m-1}},\boldsymbol{k}} \right)$$

$$\left(\prod_{i\notin I_{m-1}} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_{m-1}} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m-1} P_j^{n_j-d_j}\right)$$

$$+ O\left(\left(e_{0,m-1}^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_{m-1}^{-\delta} \right).$$

Pour terminer la preuve de l'étape 1, nous allons distinguer deux cas :

Cas 1 : supposons qu'il existe $m'\in\{m,...,r-1\}$ tel que $\frac{b_{m-1}}{b_{m'}} \leqslant \frac{\tilde{b}_{m-1}}{\tilde{b}_{m'}}$. Puisque $\frac{b_j}{b_{m-1}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}}$ pour tout $j\in\{1,...,r-1\}$, on a donc

$$\forall j\in\{1,...,r-1\},\ \ \frac{b_j}{b_{m'}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m'}}.$$

Par hypothèse de récurrence, la formule (4.104) (au rang m') est vérifiée et on remarque que (par des arguments analogues à ceux utilisés pour comparer $\tilde{N}_{\boldsymbol{e},r-1}$ et $N_{\boldsymbol{e}}$, dans la démonstration du lemme 4.5.6)

$$N_{\boldsymbol{e},m'}(P_1,...,P_r) = \tilde{N}_{\boldsymbol{e},m-1}(P_1,...,P_r) + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta} \right).$$

En remplaçant $N_{\boldsymbol{e},m'}(P_1,...,P_r)$ et $\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m-1}(P_1,...,P_r)$ par les formules asymptotiques obtenues, puis en simplifiant par $\left(\prod_{j=1}^{m-1} P_j^{n_j-d_j}\right)$, nous obtenons la formule (4.103) du théorème au rang $m-1$ valable pour les $b_m,...,b_r$ tels que $\frac{b_j}{b_{m'}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m'}}$ pour tout $j\in\{m,...,r\}$.

Cas 2 : supposons à présent que pour tout $m'\in\{m,...,r-1\}$, $\frac{b_{m-1}}{b_{m'}} \geqslant \frac{\tilde{b}_{m-1}}{\tilde{b}_{m'}}$. On a alors pour tout $j\in\{1,...,r-1\}$, $b_j\leqslant \tilde{b}_j$. Dans ce cas, la condition $n+r>\mathfrak{m}$ implique que

$$K \max\{\left(2+5\sum_{j=1}^{r}\tilde{b}_j\right)\tilde{d}, (2\delta+1)\sum_{j=1}^{r}\tilde{b}_j d_j\}$$

$$\geqslant \max\{\left(2+5\sum_{j=1}^{r} b_j\right)\tilde{d}, (2\delta+1)\sum_{j=1}^{r} b_j d_j\}$$

et donc que l'on peut appliquer le théorème 4.3.27, ce qui nous donne :

$$N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) + O\left(\left(e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j - \delta} \right) \right).$$

où l'on a noté

$$C_{\sigma,\boldsymbol{e}} = \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} J_{\sigma}.$$

Puis en comparant $N_{\boldsymbol{e}}$ et $N_{\boldsymbol{e},m-1}$ et en simplifiant à nouveau l'égalité obtenue par $\left(\prod_{j=1}^{m-1} P_j^{n_j - d_j} \right)$, nous obtenons la formule (4.103) pour tous les $b_m, ..., b_r$ tels que $\frac{b_j}{b_{m'}} \geqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m'}}$ pour tout $m' \in \{m, ..., r-1\}$.
Nous avons donc établit la résultat 1 au rang $m-1$.

Étape 2 : Démontrons à présent le résultat 2 au rang $m-1$. Nous prenons ici $b_1, ..., b_{r-1}$ quelconques tels que $\frac{b_j}{b_{m-1}} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_{m-1}}$ pour tout $j \in \{1, ..., r-1\}$. Puisque $\frac{b_j}{b_m} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_m}$, alors, comme pour la démonstration de la formule (4.103) ci-dessus, on a

$$K_{m-1} > \left(1 + 3 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_j}{b_{m-1}} \right) \tilde{d}_{m-1} + g_{m-1}(\boldsymbol{b}, \delta).$$

et on applique le théorème 4.4.12, ce qui nous donne :

$$\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m-1}(P_1, ..., P_r) = \sum_{\forall j \in \{m,...,r\},\ k_j \leqslant P_j} \left(\sum_{(x_i)_{i \in I_{m-1}} \in \Phi_{m-1}(\boldsymbol{k})} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i \in I_{m-1}}, \boldsymbol{e}} J_{(x_i, e_i)_{i \in I_{m-1}}, \boldsymbol{k}} \right) \left(\prod_{i \notin I_{m-1}} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=m}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_{m-1}} a_{i,j}} \right) \left(\prod_{j=1}^{m-1} P_j^{n_j - d_j} \right) + O\left(\left(e_{0,m-1}^{4} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_{m-1}^{-\delta} \right).$$

et en appliquant la formule (4.103) au rang $m-1$ on obtient la formule (4.104) au rang $m-1$.

Étape 3 : nous allons à présent, en employant des arguments analogues à ceux utilisés pour établir le lemme 4.5.9, démontrer que la formule (4.104) implique (4.105) (par comparaison de $\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m-1}$ et de $N_{U,\boldsymbol{e}}$). Remarquons dans un premier temps que :

$$N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1,...,P_r)=\tilde{N}_{\boldsymbol{e},m}(P_1,...,P_r)+O\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\sum_{m'\in\{1,...,r-1\}}T_{m',\tau}\right),$$

où

$$\begin{aligned}T_{m',\tau}=\operatorname{Card}\Big\{&\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r}\mid(x_i)_{i\in I_{m',\tau}}\notin\mathcal{A}^{\lambda}_{m',\tau},\ \forall k\in\{m,...,r-1\},\\ &(x_i)_{i\in I_k}\in\mathcal{A}^{\lambda}_k,\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})=0,\ \forall j\in\{1,...,r\},\ \left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor\leqslant P_j,\\ &\forall i\in\{1,...,n+r\},\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(\left\lfloor|(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}|\right\rfloor+1)^{a_{i,j}}\Big\}.\end{aligned}$$

Considérons un élément (m',τ). Posons $\mathcal{F}=(\mathcal{A}^{\lambda}_{m',\tau})^c$ et $s=\operatorname{Card}I_{m',\tau}$ de sorte que $\dim\mathcal{F}\leqslant s-\lambda$. Posons par ailleurs $J_m=I_m\cap I_{m',\tau}$, $s_m=\operatorname{Card}J_m$, et pour tout $(x_i)_{i\in J}$ fixé :

$$\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J_m}}=\{(x_i)_{i\in I_{m',\tau}\setminus J_m}\mid(x_i)_{i\in I_{m',\tau}}\in\mathcal{F}\},$$

de sorte que

$$\mathcal{F}=\bigsqcup_{(x_i)_{i\in J_m}}\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J_m}}.$$

Notons alors

$$\mathcal{S}^{(m)}_1=\{(x_i)_{i\in J_m}\mid\dim\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J_m}}>s-s_m-\frac{m\lambda}{r}\},$$

$$\mathcal{S}^{(m)}_2=\{(x_i)_{i\in J_m}\mid\dim\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J_m}}\leqslant s-s_m-\frac{m\lambda}{r}\}$$

(on remarque que $\dim\mathcal{S}^{(m)}_1\leqslant s_m-\frac{(r-m)\lambda}{r}$, car $\dim\mathcal{F}\leqslant s-\lambda$), et en notant

$$\begin{aligned}M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r)=\operatorname{Card}\{&(x_i)_{i\in\{1,...,n+r\}\setminus J_m}\mid(x_i)_{i\in I_{m',\tau}\setminus J_m}\in\mathcal{F}_{(x_i)_{i\in J_m}},\\ &\forall k\in\{m,...,r-1\},\ (x_i)_{i\in I_k}\in\mathcal{A}^{\lambda}_k\\ &\forall i\in\{1,...,n+r\}\setminus J_m,\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}P_j^{a_{i,j}}\ \text{ et }\ F(\boldsymbol{x})=0\},\end{aligned}$$

on a donc

$$T_{m',\tau} \ll \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_1^{(m)} \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r) + \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_2^{(m)} \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r).$$

On observe alors que, d'après le lemme 4.5.5

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_2^{(m)} \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r) \ll \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_2^{(m)} \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} \left(\prod_{i\notin J_m} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{\sum_{i\notin J_m} a_{i,j}}\right) P_m^{-\frac{m\lambda}{2r}} \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j}\right) P_m^{-\frac{m\lambda}{2r}}.$$

Or, puisque $\frac{b_j}{b_m} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_m}$,

$$P_m^{-\frac{\lambda m}{2r}} = P_r^{-b_m\frac{\lambda m}{2r}} \leqslant P_r^{-2rb_m(\sum_{j=1}^r \tilde{b}_j d_j+\delta)\frac{\lambda m}{2r}} \leqslant P_r^{-\sum_{j=1}^r b_j d_j-\delta} = \left(\prod_{j=1}^r P_j^{-d_j}\right) P_r^{-\delta}.$$

Par conséquent

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_2^{(m)} \\ |x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r) \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta}.$$

Remarquons à présent que, par les mêmes arguments que ceux utilisés pour démontrer le théorème 4.4.12 (reposants sur la proposition 4.4.10) on a :

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_1^{(m)}\\|x_i|\leqslant\frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1,...,P_r)$$
$$=\sum_{k_j\leqslant P_j}\sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})\\(x_i)_{i\in J_m}\in\mathcal{S}_1^{(m)}}} N_{\boldsymbol{e},(x_i)_{i\in I_m}}(P_1,...,P_m)$$
$$=\sum_{k_j\leqslant P_j}\sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})\\(x_i)_{i\in J_m}\in S_1^{(m)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)\prod_{j=1}^m P_j^{n_j-d_j}$$
$$+O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}\right) \tag{4.107}$$

Pour achever l'étape 3 de la démonstration du théorème, il est nécessaire de démontrer le lemme ci-dessous :

Lemme 4.5.11. *Si l'on suppose $n+r\geqslant\mathfrak{m}$ et que $\frac{b_j}{b_m}\leqslant\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_m}$ pour tout $j\in\{m+1,...,r\}$, on a alors que :*

$$\sum_{k_j\leqslant P_j}\sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})\\(x_i)_{i\in J_m}\in S_1^{(m)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)$$
$$\ll\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i\in I_m}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i\in I_m}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{i\notin I_m}e_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{n_j-d_j}\right)P_r^{-\delta}.$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par récurence descendante sur m. Le cas du rang $m=r-1$ a déjà été traité dans la démonstration du lemme 4.5.9. Supposons le résultat vrai au rang k pour tout $k\in\{m+1,...,r-1\}$. Montrons alors que la propriété est vraie au rang m.

Supposons dans un premier temps que pour tout $j\in\{m+1,...,r-1\}$, $b_j\leqslant\tilde{b}_j$. On remarque alors que, puisque $\dim\mathcal{S}_1^{(m)}\leqslant s_m-\frac{(r-m)\lambda}{r}$

$$\sum_{k_j\leqslant P_j}\sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})\\(x_i)_{i\in J_m}\in S_1^{(m)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}\left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{\sum_{i\notin I_m}a_{i,j}}\right)$$
$$\ll\left(\prod_{i\in I_m}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{n_j}\right)P_r^{-\frac{\lambda(r-m)}{2r}}$$

Or puisque pour tout $j \in \{m+1, ..., r-1\}$, $b_j \leqslant \tilde{b}_j$, on a alors que

$$P_r^{-\frac{(r-m)\lambda}{2r}} \leqslant P_r^{-\sum_{j=1}^r \tilde{b}_j d_j + \delta} \leqslant P_r^{-\sum_{j=1}^r b_j d_j + \delta} \leqslant \left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{-d_j} \right) P_r^{-\delta},$$

et on en déduit le résultat dans ce cas.

On suppose à présent qu'il existe $j \in \{m+1, ..., r\}$ tel que $b_j \geqslant \tilde{b}_j$, autrement dit, que $\max_{j\in\{m+1,...,r-1\}} \left(\frac{b_j}{\tilde{b}_j}\right) \geqslant 1$. Considérons $k \in \{m+1, ..., r-1\}$ tel que $\frac{b_k}{\tilde{b}_k} = \max_{j\in\{m+1,...,r-1\}} \left(\frac{b_j}{\tilde{b}_j}\right)$. On a alors, pour tout $j \in \{k+1, ..., r\}$, $\frac{b_j}{b_k} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_k}$. On remarque que, étant donné que $m < k$,

$$I_k \subset I_m,$$

$$J_k = I_k \cap I_{m',\tau} \subset I_m \cap I_{m',\tau} = J_m.$$

Posons

$$\mathcal{S}_1^{(m)} = \bigsqcup_{(x_i)_{i\in J_k}} \mathcal{S}_{1,(x_i)_{i\in J_k}}^{(m)}$$

où

$$\mathcal{S}_{1,(x_i)_{i\in J_k}}^{(m)} = \{(x_i)_{i\in J_m \setminus J_k} \mid (x_i)_{i\in J_m} \in \mathcal{S}_1^{(m)}\}.$$

Posons alors

$$\tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)} = \{(x_i)_{i\in J_k} \mid \dim \mathcal{S}_{1,(x_i)_{i\in J_k}}^{(m)} > s_m - s_k - \frac{(k-m)\lambda}{r}\},$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_2^{(k)} = \{(x_i)_{i\in J_m} \mid \dim \mathcal{S}_{1,(x_i)_{i\in J_k}}^{(m)} \leqslant s_m - s_k - \frac{(k-m)\lambda}{r}\}.$$

Remarquons que, comme précédemment,

$$\sum_{k_j \leqslant P_j} \sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m} \in \Phi_m(\boldsymbol{k}) \\ (x_i)_{i\in J_m} \in S_1^{(m)} \\ (x_i)_{i\in J_k} \in \tilde{\mathcal{S}}_2^{(k)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{k}} \left(\prod_{j=m+1}^r k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}} \right) \tag{4.108}$$

$$\ll \left(\prod_{i\in I_m} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{n_j} \right) P_k^{-\frac{k\lambda}{2r}}$$

$$\ll \left(\prod_{i\in I_m} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{n_j} \right) P_r^{-b_k(\sum_{j=1}^r \tilde{b}_j d_j + \delta)}$$

$$\ll \left(\prod_{i\in I_m} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=m+1}^r P_j^{n_j - d_j} \right) P_r^{-\delta}$$

(car $\frac{b_j}{b_k} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_k}$). D'autre part, on observe que, si $(x_i)_{i\in J_k} \in \tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)}$, puisque

$$F_{(x_i)_{i\in J_k}} \supset \bigsqcup_{(x_i)_{i\in J_m\setminus J_k}\in \mathcal{S}^{(m)}_{1,(x_i)_{i\in J_k}}} F_{(x_i)_{i\in J_m}},$$

on a, pour tout $(x_i)_{i\in J_k} \in \tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)}$,

$$\dim F_{(x_i)_{i\in J_k}} \geqslant (s - s_m - \frac{m\lambda}{r}) + (s_m - s_k - \frac{(k-m)\lambda}{r}) = s - s_k - \frac{k\lambda}{r}$$

et on en déduit que

$$\tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)} \subset \mathcal{S}_1^{(k)}.$$

Choisissons à présent $P_1, ..., P_m$ de sorte que $\frac{b_j}{b_k} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_k}$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. On a alors

(4.109)
$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in \mathcal{S}_1^{(m)}\\ (x_i)_{i\in J_k}\in\tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)} \\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1, ..., P_r) \leqslant \sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_k}\in \mathcal{S}_1^{(k)}\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_k}}(P_1, ..., P_r)$$

Or, nous avons vu (cf. (4.107) et (4.108)) que :

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i\in J_m}\in \mathcal{S}_1^{(m)}\\ |x_i|\leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i\in J_m}}(P_1, ..., P_r)$$
$$= \sum_{k_j\leqslant P_j} \sum_{\substack{(x_i)_{i\in I_m}\in\Phi_m(\boldsymbol{k})\\ (x_i)_{i\in J_m}\in \mathcal{S}_1^{(m)}\\ (x_i)_{i\in J_k}\in\tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}} \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}$$
$$+ O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j-d_j}\right) P_r^{-\delta}\right).$$

Par conséquent l'inégalité (4.109) implique :

$$\sum_{k_j \leqslant P_j} \sum_{\substack{(x_i)_{i \in I_m} \in \Phi_m(\boldsymbol{k}) \\ x_i)_{i \in J_m} \in \mathcal{S}_1^{(m)} \\ (x_i)_{i \in J_k} \in \tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i \in I_m}, \boldsymbol{e}} J_{(x_i, e_i)_{i \in I_m}, \boldsymbol{k}} \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_m} a_{i,j}} \right) \prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j}$$

$$\ll \sum_{\substack{(x_i)_{i \in J_k} \in \mathcal{S}_1^{(k)} \\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i} \prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i \in J_k}}(P_1, ..., P_r) + O\left(\left(\prod_{i=1}^{n} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_r^{-\delta} \right)$$

$$\ll \sum_{k_j \leqslant P_j} \sum_{\substack{(x_i)_{i \in I_k} \in \Phi_k(\boldsymbol{k}) \\ (x_i)_{i \in J_k} \in \mathcal{S}_k^{(1)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i \in I_k}, \boldsymbol{e}} J_{(x_i, e_i)_{i \in I_k}, \boldsymbol{k}} \left(\prod_{i \notin I_k} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=k+1}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_k} a_{i,j}} \right) \prod_{j=1}^{k} P_j^{n_j - d_j}$$

$$+ O\left(\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_r^{-\delta} \right).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang k, on obtient donc :

$$\sum_{k_j \leqslant P_j} \sum_{\substack{(x_i)_{i \in I_m} \in \Phi_m(\boldsymbol{k}) \\ x_i)_{i \in J_m} \in \mathcal{S}_1^{(m)} \\ (x_i)_{i \in J_k} \in \tilde{\mathcal{S}}_1^{(k)}}} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i \in I_m}, \boldsymbol{e}} J_{(x_i, e_i)_{i \in I_m}, \boldsymbol{k}} \left(\prod_{i \notin I_m} e_i \right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i \notin I_m} a_{i,j}} \right) \prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j}$$

$$= O\left(\left(e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_r^{-\delta} \right)$$

et on obtient donc le résultat en simplifiant par $\left(\prod_{i \notin I_m} e_i\right)^{-1} \prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j - d_j}$.

□

Fin de la démonstration du théorème 4.5.10 En appliquant ce lemme à la majoration (4.107), on obtient donc :

$$\sum_{\substack{(x_i)_{i \in J_m} \in \mathcal{S}_1^{(m)} \\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i} \prod_{j=1}^r P_j^{a_{i,j}}}} M_{(x_i)_{i \in J_m}}(P_1, ..., P_r)$$

$$= O\left(\left(e_0^{4+\delta} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j} \right) P_r^{-\delta} \right),$$

ce qui clôt la démonstration du théorème. □

Nous déduisons alors de ce théorème le théorème 4.5.1 :

Démonstration du théorème 4.5.1. Supposons dans un premier temps que $b_j \leqslant \tilde{b}_j$ pour tout $j \in \{1, ..., r-1\}$. On a alors que

$$N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) + O\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \sum_{m \in \{1,...,r-1\}} T_{m,\tau}\right),$$

où

$$\begin{aligned} T_{m,\tau} = \operatorname{Card}\Big\{ & \boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \mid (x_i)_{i \in I_{m,\tau}} \notin \mathcal{A}^{\lambda}_{m,\tau},\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0, \\ & \forall j \in \{1, ..., r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor \leqslant P_j,\ \forall i \in \{1, ..., n+r\}, \\ & |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i} \prod_{j=1}^{r} (\left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor + 1)^{a_{i,j}} \Big\} \\ & \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right) P_r^{-\lambda/2} \\ & \ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j}\right) P_r^{-\delta}. \end{aligned}$$

Or, puisque $b_j \leqslant \tilde{b}_j$, et

$$n + r \geqslant \mathfrak{m} \geqslant h^{\mathrm{Id}}_{r,\boldsymbol{t}^{(r)}}(\tilde{\boldsymbol{b}}) \geqslant h^{\mathrm{Id}}_{r,\boldsymbol{t}^{(r)}}(\boldsymbol{b}),$$

on peut appliquer le théorème 4.3.27 et on a donc

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r) = {} & C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j}\right) \\ & + O\left(\max\left\{e_0^{4+\delta}, \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{r} P_j^{n_j - d_j - \delta}\right)\right). \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Supposons à présent que $\max_{j \in \{1,...,r-1\}} \frac{b_j}{\tilde{b}_j} > 1$. Posons m un élément de $\{1, ..., r-1\}$ tel que

$$\frac{b_m}{\tilde{b}_m} = \max_{j \in \{1,...,r-1\}} \frac{b_j}{\tilde{b}_j}.$$

Cette condition implique en particulier que :

$$\forall j \in \{1, ..., r\}, \quad \frac{b_j}{b_m} \leqslant \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{b}_m},$$

et la formule (4.90) est vérifiée d'après le théorème précédent.

□

4.6 Quatrième étape

Nous allons à présent utiliser les résultats obtenus dans les sections précédentes pour trouver une formule asymptotique pour $N_{U,\sigma}(B)$. Pour cela, il sera nécessaire d'établir un analogue de [B-B, Théorème 2.1]. Introduisons les notions suivantes :

Définition 4.6.1. *Pour $N, r \in \mathbf{N}$ fixés, on considère une famille de fonctions $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ de $\mathbf{N}^r$ dans $[0, \infty[$. Soient $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbf{N}^r$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N) \in \mathbf{N}^N$ et $\delta, D, \nu > 0$ avec $\nu < 1$. On suppose de plus que $D \geqslant r \max_j(\alpha_j)$. On dira que $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ est une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille si les $h_{\boldsymbol{e}}$ vérifient les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^N$ et $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_r) \in \mathbf{N}^r$, il existe une constante $c_{\boldsymbol{e}}$ telle que :*

$$\sum_{\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{X}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{e}}\mathbf{X}^{\boldsymbol{\alpha}} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{X}^{\boldsymbol{\alpha}}(\min_{1\leqslant j\leqslant r} X_j)^{-\delta}\right),$$

   où l'on a noté $\mathbf{X}^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{j=1}^r X_j^{\alpha_j}$, $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} = \prod_{j=1}^N e_i^{\beta_i}$ et où $\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{X}$ signifie $x_j \leqslant X_j$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. De plus $(c_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ est telle que $c_{\boldsymbol{e}} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}$

2. *Pour tout $J \subsetneq \{1, ..., r\}$ non vide de cardinal $k \in \{1, ..., r-1\}$, il existe des fonctions $c_{J,\boldsymbol{e}} : \mathbf{N}^k \to [0, \infty[$ telles que pour tout $\boldsymbol{u} = (x_j)_{j\in J} \in \mathbf{N}^k$, la formule asymptotique*

$$\sum_{\forall j\notin J,\, x_j\leqslant V_j} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u})\left(\prod_{j\notin J} V_j^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{u}|^D\left(\prod_{j\notin J} V_j^{\alpha_j}\right)(\min_{j\notin J} V_j)^{-\delta}\right),$$

   est vérifiée uniformément pour tout $(V_j)_{j\notin J} \in (\mathbf{N}^*)^{r-k}$ et $|\boldsymbol{u}| \leqslant \left(\prod_{j\notin J} V_j\right)^{\nu}$.

Nous allons alors établir le résultat suivant

Théorème 4.6.2. *Soit $r \geqslant 2$ et $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille de fonctions arithmétiques. Si l'on pose*

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P) = \sum_{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\leqslant P} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}),$$

on a alors

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P) = \frac{1}{(r-1)!} c_{\boldsymbol{e}} P(\log P)^{r-1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^{r-2}\right).$$

La démonstration de ce théorème est directement inspirée de celle de V. Blomer et J.Brüdern pour [B-B, Théorème 2.1] et nous la décomposerons, comme eux, en plusieurs étapes.

4.6.1 Familles de fonctions arithmétiques

Lemme 4.6.3. *Soit $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille. On a alors que :*

$$h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

Démonstration. Immédiat en utilisant la propriété 1 de la définition 4.6.1 avec $X_j = x_j$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. □

Lemme 4.6.4. *Soit $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille. Pour tout $J \subsetneq \{1, ..., r\}$ non vide de cardinal l , l'ensemble des fonctions $(c_{J,\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ forme une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille, et on a de plus :*

$$\sum_{\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{Y}} c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) = c_{\boldsymbol{e}} \left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right) (\min_{j\in J} Y_j)^{-\delta}\right).$$

Démonstration. Posons $m = r - l$. Pour $Z \geqslant 1$, la condition 2 donne (pour $\boldsymbol{y} = (x_i)_{i\in J}$) :

$$\sum_{\forall j\notin J,\, x_j\leqslant Z} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) \left(\prod_{j\notin J} Z^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{y}|^D Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j - \delta}\right).$$

Par conséquent, pour tout $\mathbf{Y} = (Y_j)_{j\in J}$ tel que $Y_j \geqslant 1$ pour tout j, satisfaisant $|\mathbf{Y}| \leqslant Z^\nu$:

$$(4.110)\quad \sum_{\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{Y}} \sum_{\forall j\notin J,\, x_j\leqslant Z} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})$$
$$= Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j} \sum_{\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{Y}} c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j - \delta} \left(\prod_{j\in J} Y_j\right)^{D+1}\right).$$

D'autre part, d'après la condition 1, lorsque $Z \geqslant |\mathbf{Y}|$:

$$(4.111)\quad \sum_{\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{Y}} \sum_{\forall j\notin J,\, x_j\leqslant Z} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})$$
$$= c_{\boldsymbol{e}} Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j} \left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j} \left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right) (\min_{j\in J} Y_j)^{-\delta}\right).$$

En regroupant les formules (4.110) et (4.111) puis en simplifiant par $Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j}$, on a pour $Z \geqslant |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{\nu}}$:

$$\sum_{\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{Y}} c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) = c_{\boldsymbol{e}}\left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{j\in J} Y_j^{\alpha_j}\right)(\min_{j\in J} Y_j)^{-\delta}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{Y}|^{D+1}Z^{-\delta}\right).$$

En particulier la fonction $c_{J,\boldsymbol{e}}$ vérifie la condition 1 de la définition 4.6.1.

Vérifions à présent que les $c_{J,\boldsymbol{e}}$ vérifient la condition 2. Considérons $K \subsetneq J$ de cardinal $k \in \{1, ..., l-1\}$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}^r$, on pose $\boldsymbol{u} = (x_i)_{i\in K}$, $\boldsymbol{v} = (x_i)_{i\in J\setminus K}$, $\boldsymbol{z} = (x_i)_{i\notin J}$, $\boldsymbol{y} = (x_i)_{i\in J}$. On suppose $|\boldsymbol{u}| \leqslant Z$, $|\boldsymbol{v}| \leqslant Z^{m\nu}$, $|\mathbf{V}| \leqslant Z$ (où $\mathbf{V} = (V_j)_{j\in J\setminus K}$), $|\mathbf{V}| \leqslant Z^{m\nu}$ et $|\boldsymbol{u}| \leqslant \left(\prod_{j\in J\setminus K} V_j\right)^{\nu} Z^{m\nu}$. On a alors par la condition 2 sur $h_{\boldsymbol{e}}$, pour $\boldsymbol{u}$ fixé :

$$\sum_{\boldsymbol{v}\leqslant\mathbf{V}}\sum_{\forall i\notin J,\, z_i\leqslant Z} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{K,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}) Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j}\prod_{j\in J\setminus K} V_j^{\alpha_j}$$
$$+ O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{u}|^D Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j}\left(\prod_{j\in J\setminus K} V_j^{\alpha_j}\right)(\min_{j\in J\setminus K} V_j)^{-\delta}\right),$$

et d'autre part

$$\sum_{\boldsymbol{v}\leqslant\mathbf{V}}\sum_{\forall j\notin J,\, z_i\leqslant Z} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{v}\leqslant\mathbf{V}} c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j}$$
$$+ O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{u}|^D\left(\prod_{j\in J\setminus K} V_j\right)^{D+1} Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j-\delta}\right).$$

En regroupant ces deux égalités et en simplifiant par $Z^{\sum_{j\notin J}\alpha_j}$ on trouve :

$$\sum_{\boldsymbol{v}\leqslant\mathbf{V}} c_{J,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{y}) = c_{K,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u})\prod_{j\in J\setminus K} V_j^{\alpha_j} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{u}|^D\left(\prod_{j\in J\setminus K} V_j^{\alpha_j}\right)(\min_{j\in J\setminus K} V_j)^{-\delta}\right)$$
$$+ O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{u}|^D\left(\prod_{j\in J\setminus K} V_j\right)^{D+1} Z^{-\delta}\right).$$

En prenant Z assez grand on obtient alors la condition 2 pour $c_{J,\boldsymbol{e}}$, et la fonction arithmétique correspondant à K est alors $c_{K,\boldsymbol{e}}$.

□

Considérons à présent un réel A et $J \subset \{1, ..., r\}$ de cardinal l. On fixe $\boldsymbol{w} = (w_i)_{i\in J}$ et on pose $g_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}}$ la fonction de $\mathbf{N}^{r-l}$ dans $[0, \infty[$ définie par, pour tout $\boldsymbol{y} = (y_j)_{j \notin J}$:

$$g_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{w} \rangle^{-A} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})$$

où $\langle \boldsymbol{w} \rangle = \prod_{i \in J} w_i$, $x_j = w_j$ pour tout $j \in J$, et $x_j = y_j$ pour $j \notin J$.

Lemme 4.6.5. *Si* $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^N}$ *une* $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ *famille, avec* $D \geqslant r \max_j(\alpha_j)$ *et* $\delta \leqslant \min\{1, \min_j(\alpha_j)\}$*, et si* $A \geqslant D + (r+1)(\max_{j \in \{1,\dots,r\}} \alpha_j) + \nu^{-1}(1 + (\max_{j \in \{1,\dots,r\}} \alpha_j))$ *alors* $(g_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}})_{\boldsymbol{e}}$ *est une* $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ *famille.*

Démonstration. Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $J = \{1, ..., l\}$. On note alors $c_{\boldsymbol{e},l}$ pour $c_{\boldsymbol{e},J}$. D'après le lemme 4.6.3, on a :

$$\left(\prod_{j=1}^{l} w_j \right)^{-A} c_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{w}) \ll \left(\prod_{j=1}^{l} w_j^{-\alpha_j} \right) c_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{w}) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}. \tag{4.112}$$

Montrons que pour tout $\boldsymbol{w}$, en posant $\langle \boldsymbol{w} \rangle = \prod_{i=1}^{l} w_i$, on a :
(4.113)

$$\sum_{\boldsymbol{y} \leqslant \mathbf{Y}} \frac{h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})}{\langle \boldsymbol{w} \rangle^A} = \frac{c_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{w})}{\langle \boldsymbol{w} \rangle^A} \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j} \right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j} \right) (\min Y_j)^{-\delta} \right)$$

(ce qui impliquera que $(g_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}})_{\boldsymbol{e}}$ vérifie la condition 1. avec $\frac{c_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{w})}{\langle \boldsymbol{w} \rangle^A}$ à la place de $c_{\boldsymbol{e}}$). Supposons dans un premier temps que $|\boldsymbol{w}| \leqslant \langle \mathbf{Y} \rangle^{\nu}$. Puisque $A > D$, la formule (4.113) découle directement de la condition 2 pour $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$. Supposons à présent que $|\boldsymbol{w}| > \langle \mathbf{Y} \rangle^{\nu}$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{c_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{w})}{\langle \boldsymbol{w} \rangle^A} \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j} \right) &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \left(\prod_{j=1}^{l} w_j^{\alpha_j - A} \right) \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j} \right) \\ &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{w}|^{r(\max \alpha_j) - A} \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j \right)^{\max \alpha_j} \\ &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{w}|^{\max \alpha_j (r + \nu^{-1}) - A} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

De même, d'après le lemme 4.6.3 :

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{y} \leqslant \mathbf{Y}} \frac{h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})}{\langle \boldsymbol{w} \rangle^A} &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \left(\prod_{j=1}^{l} w_j^{\alpha_j - A} \right) \left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j + 1} \right) \\ &\ll |\boldsymbol{w}|^{(\max \alpha_j)(r+1+\nu^{-1}) - A} \leqslant \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Étant donné que $\delta \leqslant \min\{1, \min_j(\alpha_j)\}$, on a que $\left(\prod_{j=l+1}^{r} Y_j^{\alpha_j} \right) (\min Y_j)^{-\delta} \geqslant 1$, et l'égalité (4.113) est donc vraie.

Nous allons montrer de façon analogue que $(g_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}})_{\boldsymbol{e}}$ satisfait la condition 2. Considérons alors $J' \subset \{l+1,...,r\}$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $J' = \{l+1,...,l+k\}$ pour un certain $k \in \{1,...,r-l-1\}$. Nous allons chercher à montrer que

(4.114)

$$\sum_{\boldsymbol{z}\leqslant \mathbf{Z}} \frac{h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})}{\langle \boldsymbol{w}\rangle^A} = \frac{c_{\boldsymbol{e},l+k}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})}{\langle \boldsymbol{w}\rangle^A}\left(\prod_{j=l+k+1}^{r} Z_j^{\alpha_j}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{v}|^D\left(\prod_{j=l+k+1}^{r} Z_j^{\alpha_j}\right)(\min Z_j)^{-\delta}\right)$$

uniformément pour $|\boldsymbol{v}| \leqslant \langle \mathbf{Z}\rangle^{\nu}$. Comme précédemment, nous commençons par le cas $|\boldsymbol{w}| \leqslant \langle \mathbf{Z}\rangle^{\nu}$. Puisque $A > D$, on a $|(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})|^D\langle \boldsymbol{w}\rangle^{-A} \leqslant |\boldsymbol{v}|^D$ et la formule (4.114) découle à nouveau de la condition 2 pour $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$. Si $|\boldsymbol{w}| > \langle \mathbf{Y}\rangle^{\nu}$, d'après le lemme 4.6.3, on a comme précédemment :

$$\begin{aligned}\frac{c_{\boldsymbol{e},l+k}(\boldsymbol{w})}{\langle \boldsymbol{w}\rangle^A}\left(\prod_{j=l+k+1}^{r} Z_j^{\alpha_j}\right) &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{j=1}^{l} w_j^{\alpha_j-A}\right)\left(\prod_{j=1+1}^{l+k} v_j^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{j=l+k+1}^{r} Z_j^{\alpha_j}\right)\\ &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{w}|^{\max\alpha_j(r+\nu^{-1})-A}\left(\prod_{j=1+1}^{l+k} v_j^{\alpha_j}\right) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{j=1+1}^{l+k} v_j^{\alpha_j}\right)\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{z}\leqslant \mathbf{Z}} \frac{h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})}{\langle \boldsymbol{w}\rangle^A} &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{j=1}^{l} w_j^{\alpha_j-A}\right)\left(\prod_{j=1+1}^{l+k} v_j^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{j=l+k+1}^{r} Y_j^{\alpha_j+1}\right)\\ &\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(\prod_{j=1+1}^{l+k} v_j^{\alpha_j}\right).\end{aligned}$$

d'où le résultat (puisque $D \geqslant r\max\alpha_j$). □

4.6.2 Lemmes préliminaires

Pour $X > 1$, on note

$$\Delta^{(r)} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^r \mid 1 < t_1 < t_2 < ... < t_r\}, \tag{4.115}$$

$$\Delta^{(r)}(X) = \{\boldsymbol{t} \in \Delta^{(r)} \mid t_r \leqslant X\}. \tag{4.116}$$

Nous allons chercher à évaluer les intégrales

$$I_{\boldsymbol{e},j}(X) = \int_{\Delta^{(r)}(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}\rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{t}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{t},$$

où $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1} = (\alpha_1+1,...,\alpha_r+1)$ et $\langle \boldsymbol{t}\rangle = \prod_{j=1}^{r} t_j$.

Lemme 4.6.6. *Soit* $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^N}$ *une* $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ *famille et* $j \in \mathbf{N}^*$. *Il existe un réel* $\eta > 0$ *et un polynôme* $q_{\boldsymbol{e},j}$ *à coefficients de taille* $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ *tels que :*

$$I_{\boldsymbol{e},j}(X) = q_{\boldsymbol{e},j}(\log(X)) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta}).$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas $r = 1$. Dans ce cas, on peut réécrire la condition 1. sous la forme :

$$\sum_{x \leqslant t} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{e}} t^{\alpha} + E_{\boldsymbol{e}}(t)$$

où $E_{\boldsymbol{e}}$ est une fonction continue par morceaux telle que $E_{\boldsymbol{e}}(t) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} t^{\alpha-\delta}$. On a alors que

$$\int_1^X \frac{(\log t)^j}{t^{\alpha+1}} \sum_{x \leqslant t} h_{\boldsymbol{e}}(x) dt = \frac{c_{\boldsymbol{e}}}{(j+1)} (\log X)^{j+1} + D_{\boldsymbol{e},j} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta} \log X)$$

avec

$$D_{\boldsymbol{e},j} = \int_1^{\infty} E_{\boldsymbol{e}}(t) t^{-\alpha-1} (\log t)^j dt \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

D'où le résultat lorsque $r = 1$.

Nous allons à présent procéder par récurrence sur r. Nous supposons ici que $r > 1$ et que le lemme est établi pour toute valeur strictement inférieure à r. Nous allons séparer l'ensemble $\Delta^{(r)}$ en une union de r ensembles disjoints : on pose $t_0 = 1$ et $\beta = \min\{\nu, \delta(2D + 4r)^{-1}\}$ (en particulier $\beta < 1$, puisque $\nu < 1$). Pour $l \in \{0, ..., r-1\}$, notons

$$\Delta^{(r,l)} = \{\boldsymbol{t} \in \Delta^{(r)} \mid t_l \leqslant t_{l+1}^{\beta},\ \forall i \in \{l+1, ..., r-1\},\ t_i > t_{i+1}^{\beta}\}, \tag{4.117}$$

$$\Delta^{(r,l)}(X) = \Delta^{(r,l)} \cap \Delta^{(r)}(X). \tag{4.118}$$

On a alors que

$$\Delta^{(r)}(X) = \bigsqcup_{l \in \{0,...,r-1\}} \Delta^{(r,l)}(X),$$

et on a donc

$$I_{\boldsymbol{e},j}(X) = \sum_{l=0}^{r-1} I_{\boldsymbol{e},j,l}(X),$$

où l'on a noté :

$$I_{\boldsymbol{e},j,l}(X) = \int_{\Delta^{(r,l)}(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t} \rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{t}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t}. \tag{4.119}$$

Traitons d'abord le cas des intégrales $I_{\boldsymbol{e},j,0}(X)$. Pour $\boldsymbol{t} \in \Delta^{(r,0)}(X)$, on pose :

$$\sum_{\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{t}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}} + E_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t})$$

avec

$$E_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}} t_1^{-\delta}.$$

Pour tout $Z \geqslant 1$:

$$\int_{\Delta^{(r,0)}(2Z) \setminus \Delta^{(r,0)}(Z)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t} \rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} E_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}$$
$$\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \int_Z^{2Z} \int_{t_r^{\beta}}^{t_r} \int_{t_{r-1}^{\beta}}^{t_{r-1}} \ldots \int_{t_2^{\beta}}^{t_2} \langle \boldsymbol{t} \rangle^{-1} t_1^{-\delta} (\log t_r)^j d\boldsymbol{t} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{-\delta\beta^r}.$$

On en déduit, en sommant sur les intervalles dyadiques, que l'intégrale

$$D_{\boldsymbol{e},j,0} = \int_{\Delta^{(r,0)}} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t} \rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} E_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}$$

existe et diffère de l'intégrale sur $\Delta^{(r,0)}(X)$ d'un terme d'erreur $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^r})$. On a donc que :

$$I_{\boldsymbol{e},j,0}(X) = c_{\boldsymbol{e}} \int_{\Delta^{(r,0)}(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t} \rangle)^j}{\langle \boldsymbol{t} \rangle} d\boldsymbol{t} + \underbrace{D_{\boldsymbol{e},j,0}}_{\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^r}).$$

Considérons à présent les intégrales $I_{\boldsymbol{e},j,l}(X)$ pour $l \in \{1, ..., r-1\}$. Pour $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^r$, on pose $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{t}', \boldsymbol{t}'')$ avec $\boldsymbol{t}' = (t_1, ..., t_l)$ et $\boldsymbol{t}'' = (t_{l+1}, ..., t_r)$. On a alors $|\boldsymbol{t}'| \leqslant |\boldsymbol{t}''|^{\nu}$ (car $\beta \leqslant \nu$) pour tout $\boldsymbol{t} \in \Delta^{(r,l)}$. Par conséquent, d'après la condition 2, on a uniformément pour tout $\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}'$.

$$\sum_{\boldsymbol{x}'' \leqslant \boldsymbol{t}''} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') = c_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}') \prod_{j=l+1}^{r} t_j^{\alpha_j} + E_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}''),$$

où

$$J_l = \{1, ..., l\},$$

$$E_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}'') \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{x}'|^D t_{l+1}^{-\delta} \prod_{j=l+1}^{r} t_j^{\alpha_j}.$$

Posons

$$R_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}'} E_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}'').$$

Ceci définit une fonction sur $\Delta^{(r,l)}$ satisfaisant

$$R_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{t}) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \langle \boldsymbol{t}' \rangle t_l^D t_{l+1}^{-\delta} \prod_{j=l+1}^{r} t_j^{\alpha_j}.$$

Pour $Z \geqslant 1$ on voit alors que :

$$\int_{\Delta^{(r,l)}(2Z)\setminus\Delta^{(r,l)}(Z)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}\rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} R_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$$
$$\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \int_{\mathcal{R}_l(Z)} \langle \boldsymbol{t}''\rangle^{-1} t_{l+1}^{-\delta} \int_{\Delta^{(l)}(t_{l+1}^{\beta})} t_l^D \prod_{j=1}^{l} t_j^{-\alpha_j} d\boldsymbol{t}' d\boldsymbol{t}'',$$

où

$$\mathcal{R}_l(Z) = \{\boldsymbol{t}'' \mid Z < t_r < 2Z,\ \forall i \in \{l+1, ..., r-1\},\ t_{i+1}^{\beta} \leqslant t_i \leqslant t_{i+1}\}.$$

On remarque que $t_l^D \prod_{j=1}^{l} t_j^{-\alpha_j} \ll t_{l+1}^{D\beta}$ pour tout $\boldsymbol{t}' \in \Delta^{(l)}(t_{l+1}^{\beta})$, et que la mesure de $\Delta^{(l)}(t_{l+1}^{\beta})$ est majorée par $t_{l+1}^{l\beta}$ et on en déduit, puisque $D\beta + l\beta \leqslant \frac{\delta}{2}$, que l'intégrale ci-dessus est bornée par

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \int_{\mathcal{R}_l(Z)} \langle \boldsymbol{t}''\rangle^{-1} t_{l+1}^{-\delta/2} d\boldsymbol{t}'' \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} Z^{-\delta\beta^r/2}.$$

Ainsi, en sommant sur les intervalles dyadiques, il s'ensuit que

$$D_{\boldsymbol{e},j,l} = \int_{\Delta^{(r,l)}} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}\rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} R_{\boldsymbol{e},l}(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$$

est du type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ et diffère de l'intégrale sur $\Delta^{(r,l)}(X)$ de $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^r/2})$. On a donc que :

$$I_{\boldsymbol{e},j,l}(X) = K_{\boldsymbol{e},j,l} + D_{\boldsymbol{e},j,l} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^r/2}),$$

où

$$K_{\boldsymbol{e},j,l} = \int_{\Delta^{(r,l)}(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}\rangle)^j}{\langle \boldsymbol{t}''\rangle \prod_{j=1}^{l} t_j^{\alpha_j+1}} \sum_{\boldsymbol{x}'\leqslant \boldsymbol{t}'} c_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{t}.$$

On observe que, par la formule du binôme de Newton :

$$K_{\boldsymbol{e},j,l} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \int_{\mathcal{S}_l(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}''\rangle)^{j-k}}{\langle \boldsymbol{t}''\rangle} \int_{\Delta^{(l)}(t_{l+1}^{\beta})} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}'\rangle)^k}{\prod_{j=1}^{l} t_j^{\alpha_j+1}} \sum_{\boldsymbol{x}'\leqslant \boldsymbol{t}'} c_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{t}$$

où l'on a noté :

$$\mathcal{S}_l(X) = \{\boldsymbol{t}'' \mid t_r \leqslant X,\ \text{et}\,\forall i \in \{l+1, ..., r-1\},\ t_{i+1}^{\beta} \leqslant t_i \leqslant t_{i+1}\}.$$

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence ainsi que le lemme 4.6.4, on trouve alors :

$$\int_{\Delta^{(l)}(t_{l+1}^{\beta})} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}'\rangle)^k}{\prod_{j=1}^{l} t_j^{\alpha_j+1}} \sum_{\boldsymbol{x}'\leqslant \boldsymbol{t}'} c_{\boldsymbol{e},J_l}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{t}' = Q_{\boldsymbol{e},l,k}(\log t_{l+1}^{\beta}) + F_{\boldsymbol{e},l,k}(t_{l+1}^{\beta}),$$

où $Q_{\boldsymbol{e},l,k}$ est un polynôme à coefficients de type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ et $F_{\boldsymbol{e},l,k}$ une fonction telle que $F_{\boldsymbol{e},l,k}(t) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} t^{-\eta(l)}$ pour un certain $\eta(l) > 0$. Comme nous l'avons fait précédemment, nous en déduisons qu'il existe un réel $E_{\boldsymbol{e},j,l,k}$ tel que $E_{\boldsymbol{e},j,l,k} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}$ et

$$\int_{\mathcal{S}_l(X)} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}''\rangle)^{j-k}}{\langle \boldsymbol{t}''\rangle} F_{\boldsymbol{e},l,k}(t_{l+1}^{\beta}) d\boldsymbol{t}'' = E_{\boldsymbol{e},j,l,k} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta(l)\beta^r/2}).$$

En sommant sur k, on a alors qu'il existe un réel, noté $E_{\boldsymbol{e},j,l}$ tel que :

$$K_{\boldsymbol{e},j,l} = E_{\boldsymbol{e},j,l} + \int_{S_l(X)} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}''\rangle)^{j-k}}{\langle \boldsymbol{t}''\rangle} Q_{\boldsymbol{e},l,k}(\log t_{l+1}^{\beta}) d\boldsymbol{t}'' + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta(l)\beta^k/2}).$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned} I_{\boldsymbol{e},j,l}(X) = E_{\boldsymbol{e},j,l} + \int_{S_l(X)} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}''\rangle)^{j-k}}{\langle \boldsymbol{t}''\rangle} Q_{\boldsymbol{e},l,k}(\log t_{l+1}^{\beta}) d\boldsymbol{t}'' \\ + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta(l)\beta^k/2}) + D_{\boldsymbol{e},j,l} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^r/2}), \end{aligned}$$

On peut par ailleurs développer $(\log\langle \boldsymbol{t}''\rangle)^{j-k} Q_{\boldsymbol{e},l,k}(\log t_{l+1}^{\beta})$ en un polynôme en $\log(t_i)$ pour $i \in \{l+1, ..., r\}$ à coefficients $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$, et on peut donc écrire l'intégrale de la formule ci-dessus comme une combinaison linéaire (à coefficients de type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$) d'intégrales du type :

$$\int_{S_l(X)} \frac{\prod_{i=l+1}^{r} (\log t_i)^{b_i}}{\prod_{i=l+1}^{r} t_i} d\boldsymbol{t}''$$

avec $b_{l+1}, ..., b_r \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Ces intégrales peuvent être calculées explicitement et sont des polynômes en $\log(X)$ à un terme d'erreur de type $O(X^{-\beta^r/2})$ près, d'où le résultat.

□

On déduit directement de ce lemme le résultat suivant :

Lemme 4.6.7. *Soit $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^N}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille et $j \in \mathbf{N}^*$. Il existe un réel $\eta > 0$ et un polynôme $Q_{\boldsymbol{e},j}$ à coefficients de taille $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ tels que :*

$$\int_{[1,X]^r} \frac{(\log\langle \boldsymbol{t}\rangle)^j}{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{t}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t} = Q_{\boldsymbol{e},j}(\log(X)) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta}).$$

4.6.3 Un résultat intermédiaire

On pose pour $r \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}^*$:

$$V_{r,j} = \int_{[0,1]^r} (\xi_1 + ... + \xi_r)^j d\boldsymbol{\xi}. \tag{4.120}$$

On remarque que :

$$V_{r,j} = \sum_{\substack{a_1+...+a_r=j \\ \forall i \in \{1,...,r\},\, a_i \geqslant 0}} \binom{j}{a_1 \,...\, a_k} \frac{1}{(a_1+1)...(a_r+1)}.$$

Théorème 4.6.8. *Soit $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille et $j \in \mathbf{N}^*$. Il existe alors un réel $\eta > 0$ et une famille de polynômes $(p_{\boldsymbol{e},j})$ de degré au plus $r+j$ dont les coefficients sont de type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ tels que :*

$$\sum_{\forall i,\, x_i \leqslant X} \frac{(\log\langle \boldsymbol{x}\rangle)^j}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = p_{\boldsymbol{e},j}(\log X) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta}).$$

De plus, si $c_{\boldsymbol{e}} \neq 0$, alors le degré de $p_{\boldsymbol{e},j}$ est exactement $r+j$ et son coefficient dominant est $\left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) c_{\boldsymbol{e}} V_{r,j}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\log(xy)^j}{x^\alpha y^\beta} = -\frac{\alpha q_j(\log(xy))}{x^{\alpha+1} y^\beta},$$

où $q_j(t) = t^j + j\alpha^{-1} t^{j-1}$. En appliquant cette égalité récursivement on obtient alors par sommation par parties :

$$\sum_{\forall i,\, x_i \leqslant X} \frac{(\log\langle \boldsymbol{x}\rangle)^j}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{J \subset \{1,...,r\}} \left(\prod_{i\in J} \alpha_i\right) \Xi_J,$$

où

$$\Xi_\emptyset = (r \log X)^j X^{-\sum_{i=1}^r \alpha_i} \sum_{\forall i,\, x_i \leqslant X} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}),$$

et pour $J \neq \emptyset$ de cardinal n et $m = r - n$:

$$\Xi_J = X^{-\sum_{i\notin J} \alpha_i} \int_{[1,X]^n} \frac{q_J(\log(X^m \prod_{i\in J} t_i))}{\prod_{i\in J} t_i^{\alpha_i+1}} \sum_{i\in J,\, x_i \leqslant t_i} \sum_{i\notin J,\, x_i \leqslant X} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d(t_i)_{i\in J},$$

où q_J est un polynôme unitaire de degré j. L'objectif est à présent de montrer que pour tout $J \subset \{1,...,r\}$, il existe un polynôme $p_{\boldsymbol{e},J}$ dont les coefficients sont du type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$, et satisfaisant la propriété :

$$\Xi_J = p_J(\log X) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta}\right). \tag{4.121}$$

Si $J = \{1, ..., r\}$, la formule (4.121) résulte du lemme 4.6.7. D'autre part, si $J = \emptyset$, par définition de $\Xi_\emptyset$, on a

$$\Xi_\emptyset = (r \log X)^j (c_{\boldsymbol{e}} + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta})),$$

d'où le résultat. Il nous reste à traiter le cas où $n \in \{1, ..., r-1\}$. Quitte à permuter les variables x_i, on peut se ramener au cas où $J = \{1, ..., n\}$. Écrivons alors $\Xi_n = \Xi_{\{1,...,n\}}$. Soit $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_n)$. Par développement multinomial, on remarque qu'il existe des constantes $\gamma_{k,s}$ telles que :

$$q_{\{1,...,n\}}(\log(X^m \prod_{i \notin J} t_i)) = \sum_{k+s \leqslant j} \gamma_{k,s} (\log(\prod_{i=1}^{n} t_i))^k (\log X)^s,$$

et par conséquent,

$$\Xi_n = X^{-\sum_{i=n+1}^r \alpha_i} \sum_{k+s \leqslant j} \gamma_{k,s} (\log X)^s \int_{[1,X]^n} \frac{(\log(\prod_{i=1}^n t_i))^k}{\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i+1}} \sum_{\substack{x_i \leqslant t_i \\ i \in \{1,...,n\}}} \sum_{\substack{x_i \leqslant X \\ i \in \{n+1,...r\}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t}. \tag{4.122}$$

Première étape : remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{[1,X]^n} \frac{(\log(\prod_{i=1}^n t_i))^k}{\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i+1}} \sum_{\substack{x_i \leqslant t_i \\ i \in \{1,...,n\}}} \sum_{\substack{x_i \leqslant X \\ i \in \{n+1,...r\}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t} \\ = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \int_{\Delta^{(n)}(X)} \frac{(\log(\prod_{i=1}^n t_i))^k}{\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i}} \sum_{\substack{x_{\sigma(i)} \leqslant t_i \\ i \in \{1,...,n\}}} \sum_{\substack{x_i \leqslant X \\ i \in \{n+1,...r\}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t}. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Comme dans la section précédente, nous allons partitionner l'ensemble $\Delta^{(n)}(X)$. Prenons à nouveau $\beta = \min\{\nu, \delta(2D+4r)^{-1}\}$, et considérons les intervalles :

$$\forall i \in \{0, ..., n-1\},\ \mathfrak{I}_i =]X^{\beta^{i+1}}, X^{\beta^i}],\ \ \mathfrak{I}_n = [1, X^{\beta^n}],$$

On a alors

$$[1, X] = \bigsqcup_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{I}_i.$$

Étant donné $\boldsymbol{t} \in \Delta^{(n)}(X)$, il existe au moins un entier $i \in \{0, ..., n\}$ tel que $\mathfrak{I}_i$ ne contient aucune des coordonnées de $\boldsymbol{t}$. Notons $i(\boldsymbol{t})$ le plus petit de ces entiers i. On pose alors $l(\boldsymbol{t}) = 0$ si $t_1 > X^{\beta^{i(\boldsymbol{t})}}$, et sinon $l(\boldsymbol{t})$ désigne le plus grand entier l tel que $t_l \leqslant X^{\beta^{i(\boldsymbol{t})+1}}$. On note alors

$$\Delta_{i,l}^{(n)}(X) = \{\boldsymbol{t} \in \Delta^{(n)}(X) \mid i(\boldsymbol{t}) = i,\ l(\boldsymbol{t}) = l\}.$$

On a alors
$$\Delta^{(n)}(X) = \bigsqcup_{0 \leqslant i \leqslant n} \Delta_{i,l}^{(n)}(X),$$
et on remarque de plus que $\Delta_{i,l}^{(n)}(X)$ est non vide uniquement lorsque $i+l \leqslant n$. On pose à présent
$$J_{k,n,i,l}^{\sigma}(\boldsymbol{e}) = X^{-\sum_{\rho=n+1}^{r}\alpha_\rho} \int_{\Delta_{i,l}^{(n)}(X)} \frac{(\log(\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho))^k}{\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho^{\alpha_\rho+1}} \sum_{\substack{x_{\sigma(\rho)} \leqslant t_\rho \\ \rho \in \{1,\dots,n\}}} \sum_{\substack{x_\rho \leqslant X \\ \rho \in \{n+1,\dots r\}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{t},$$
et on a alors, par les formules (4.122) et (4.123)
$$\Xi_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{k+s \leqslant j} \gamma_{k,s} (\log X)^s \sum_{i+l \leqslant n} J_{k,n,i,l}^{\sigma}(\boldsymbol{e}).$$
Deuxième étape : nous allons à présent chercher à évaluer $J_{k,n,i,l}^{\sigma}(\boldsymbol{e})$. Quitte à permuter les variables, nous nous ramenons à l'estimation de $J_{k,n,i,l}(\boldsymbol{e}) = J_{k,n,i,l}^{Id}(\boldsymbol{e})$. Commençons par traiter le cas de $J_{k,n,i,0}(\boldsymbol{e})$. Remarquons que $\Delta_{0,0}^{(n)}(X)$ est vide, et que l'on peut donc supposer $i \geqslant 1$. Pour $\boldsymbol{t} \in \Delta_{i,0}^{(n)}(X)$, on a $t_1 > X^{\beta^i} \geqslant X^{\beta^n}$ et la condition 1. donne :
$$\sum_{\substack{x_\rho \leqslant t_\rho \\ \rho \in \{1,\dots,n\}}} \sum_{\substack{x_\rho \leqslant X \\ \rho \in \{n+1,\dots r\}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{e}} X^{\sum_{\rho=n+1}^{r}\alpha_\rho} \prod_{\rho=1}^{n} t_\rho^{\alpha_\rho} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{\sum_{\rho=n+1}^{r}\alpha_\rho - \delta\beta^n} \prod_{\rho=1}^{n} t_\rho^{\alpha_\rho}\right).$$
Par conséquent,
$$J_{k,n,i,0}(\boldsymbol{e}) = c_{\boldsymbol{e}} \int_{\Delta_{i,0}^{(n)}(X)} \frac{(\log(\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho))^k}{\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho} d\boldsymbol{t} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^n/2}\right).$$
Montrons à présent qu'il existe un polynôme Q ne dépendant que de n, i, β, k tel que :
$$\int_{\Delta_{i,0}^{(n)}(X)} \frac{(\log(\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho))^k}{\prod_{\rho=1}^{n} t_\rho} d\boldsymbol{t} = Q(\log X). \tag{4.124}$$
Pour cela, considérons des entiers naturels $n = u_1 > u_2 > \dots > u_i > u_{i+1} = 1$ et posons $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_{i+1})$. Soit
$$\Gamma_{i,\boldsymbol{u}} = \{\boldsymbol{t} \in \Delta^{(n)}(X) \mid \forall \lambda \in \{0, \dots, i-1\},\ \forall \rho \in \{u_{\lambda+2}+1, \dots, u_{\lambda+1}\},\ t_\rho \in \mathfrak{I}_\lambda\}.$$
Par construction
$$\Delta_{i,0}^{(n)}(X) = \bigsqcup_{\boldsymbol{u}} \Gamma_{i,\boldsymbol{u}}.$$

Par développement multinomial, on a :

$$\int_{\Delta_{i,0}^{(n)}(X)} \frac{(\log(\prod_{\rho=1}^n t_\rho))^k}{\prod_{\rho=1}^n t_\rho} d\boldsymbol{t}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{u}} \sum_{a_1+\ldots+a_n=k} \binom{k}{a_1 \ldots a_n} \int_{\Gamma_{i,\boldsymbol{u}}} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\log t_\rho)^{a_\rho}}{\prod_{\rho=1}^n t_\rho} d\boldsymbol{t}.$$

Par définition de $\Gamma_{i,\boldsymbol{u}}$, cette dernière intégrale se factorise en produit d'intégrale sur $t_\rho \in \mathfrak{I}_\lambda$ avec $\rho \in \{u_{\lambda+2}+1, ..., u_{\lambda+1}\}$. Une telle intégrale prend la forme :

$$\int_{Y^\beta \leqslant v_1 < \ldots < v_s \leqslant Y} \frac{\prod_{\rho=1}^s (\log v_\rho)^{b_\rho}}{\prod_{\rho=1}^s v_\rho} d\boldsymbol{v},$$

où $Y = X^{\beta^\lambda}$. Ces intégrales peuvent être calculées explicitement et donnent un polynôme en $\log(X)$, d'où le résultat. Nous avons donc montré que

$$J_{k,n,i,0}(\boldsymbol{e}) = c_{\boldsymbol{e}} Q(\log X) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta\beta^n/2}\right).$$

Traitons maintenant le cas $l = n$. Puisque l'on a supposé $l + i \leqslant n$, on doit avoir $i = 0$, et on observe que $\Delta_{0,n}^{(n)}(X) = \Delta^{(n)}(X^\beta)$. Rappelons que $\beta \leqslant \nu$, et par conséquent, en écrivant $\boldsymbol{x}' = (x_1, ..., x_l)$, on déduit de la condition 2 que

$$\sum_{\substack{x_j \leqslant X \\ j \in \{n+1,\ldots,r\}}} h_{\boldsymbol{e}} = c_{\boldsymbol{e},\{1,\ldots,l\}}(\boldsymbol{x}') X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{x}'|^D X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j - \delta}\right).$$

Pour $\boldsymbol{t} \in \Delta^{(n)}(X^\beta)$, en sommant sur $\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}$, on obtient :

$$\sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}} \sum_{\substack{x_j \leqslant X \\ j \in \{n+1,\ldots,r\}}} h_{\boldsymbol{e}} = X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j} \sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}} c_{\boldsymbol{e},\{1,\ldots,l\}}(\boldsymbol{x}') + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{t}|^{n+D} X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j - \delta}\right).$$

En rappelant que $\beta \leqslant \delta/(4n+2D)$, et en utilisant la définition de $J_{k,n,0,n}(\boldsymbol{e})$ on trouve :

$$J_{k,n,0,n}(\boldsymbol{e}) = \int_{\Delta^{(n)}(X^\beta)} \frac{(\log(\prod_{\rho=1}^n t_\rho))^k}{\prod_{\rho=1}^n t_\rho^{\alpha_\rho+1}} \sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}} c_{\boldsymbol{e},\{1,\ldots,l\}}(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{t} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\delta/2}\right).$$

D'après le lemme 4.6.4, on peut appliquer le lemme 4.6.6 avec $c_{\boldsymbol{e},\{1,\ldots,l\}}$ à la place de $h_{\boldsymbol{e}}$, et il s'ensuit que $J_{k,n,0,n}(\boldsymbol{e})$ est un polynôme en $\log X$ à coefficients de type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ à un terme d'erreur près de type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta})$ pour un certain $\eta > 0$. Il nous reste à traiter le cas où $l \in \{1, ..., n-1\}$. Posons $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{t}', \boldsymbol{t}'')$, avec $\boldsymbol{t}' = (t_1, ..., t_l)$ et $\boldsymbol{t}'' = (t_{l+1}, ..., t_n)$. Remarquons que $\boldsymbol{t} \in$

$\Delta_{i,l}^{(n)}(X)$ si et seulement si $\boldsymbol{t}' \in \Delta^{(l)}(X^{\beta^{i+1}})$ et $\boldsymbol{t}'' \in \Delta_{i,0}^{(n-l)}(X)$. De plus $\beta \leqslant \nu$, et par la condition 2 on a :

$$\sum_{\substack{x_i \leqslant t_i \\ l<i\leqslant n}} \sum_{\substack{x_i \leqslant X \\ n<i\leqslant r}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = c_{\boldsymbol{e},\{1,\dots,l\}}(\boldsymbol{x}') X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j} \prod_{\rho=l+1}^n t_\rho^{\alpha_\rho} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{x}'|^D X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho} \left(\prod_{\rho=l+1}^n t_\rho^{\alpha_\rho} \right) t_{l+1}^{-\delta} \right).$$

Puis en sommant sur les $\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}'$, on trouve (puisque $t_{l+1} \geqslant X^{\beta^i}$) :

$$\sum_{\substack{x_i \leqslant t_i \\ 1\leqslant i\leqslant n}} \sum_{\substack{x_i \leqslant X \\ n<i\leqslant r}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = X^{\sum_{j=n+1}^r \alpha_j} \prod_{\rho=l+1}^n t_\rho^{\alpha_\rho} \sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}'} c_{\boldsymbol{e},\{1,\dots,l\}}(\boldsymbol{x}') + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{t}'|^{D+n} X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho - \delta\beta^i} \left(\prod_{\rho=l+1}^n t_\rho^{\alpha_\rho} \right) \right).$$

En multipliant ce résultat par $\left(\prod_{\rho=1}^n t_\rho^{-\alpha_\rho - 1}\right) (\log \prod_{\rho=1}^n t_\rho)^k$ et en intégrant sur $\Delta_{i,l}^{(n)}(X)$, le terme d'erreur peut être majoré par :

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho - \delta\beta^i} (\log X)^k \int_{\Delta_{i,l}^{(n)}(X)} \left(\prod_{\rho=1}^n t_\rho \right)^{-1} |\boldsymbol{t}'|^{n+D} d\boldsymbol{t}$$
$$\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho - \delta\beta^i} (\log X)^{k+n} \underbrace{\int_{\Delta^{(l)}(X^{\beta^{i+1}})} |\boldsymbol{t}'|^{n+D} d\boldsymbol{t}'}_{\ll X^{\beta^{i+1}(2n+D)} \ll X^{\delta\beta^i/2}} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho - \delta\beta^n/2}.$$

Ainsi, à un terme d'erreur $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{\sum_{\rho=n+1}^r \alpha_\rho - \delta\beta^n/2})$ près, l'intégrale $J_{k,n,l,n}(\boldsymbol{e})$ vaut :

$$\sum_{k'+k''=k} \binom{k}{k'} \int_{\Delta_{i,0}^{(n-l)}(X)} \frac{(\log \prod_{\rho=l+1}^n t_\rho)^{k''}}{\prod_{\rho=l+1}^n t_\rho} \int_{\Delta^{(l)}(X^{\beta^{i+1}})} \frac{(\log \prod_{\rho=1}^l t_\rho)^{k'}}{\prod_{\rho=1}^l t_\rho^{\alpha_\rho+1}} \sum_{\boldsymbol{x}' \leqslant \boldsymbol{t}'} c_{\boldsymbol{e},\{1,\dots,l\}}(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{t}'$$

Par application des lemmes 4.6.4 et 4.6.6 et de la formule (4.124), on montre directement que ceci est, à un terme d'erreur $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} X^{-\eta})$ près, un polynôme en $\log(X)$ à coefficients $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$.

Troisième étape : Le degré et le coefficient dominant du polynôme $p_{\boldsymbol{e},j}$ peuvent être calculés de la manière suivante. On a par définition de Ξ_r et par la condition 1. :

$$\Xi_r = c_{\boldsymbol{e}} \int_{[1,X]^r} \frac{q_{\{1,\dots,r\}}(\log(\prod_{i=1}^r t_i))}{\prod_{i=1}^r t_i} d\boldsymbol{t} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \int_{[1,X]^r} \frac{(\log(\prod_{i=1}^r t_i))^j}{\prod_{i=1}^r t_i \min_{i\in\{1,\dots,r\}} t_i^\delta} d\boldsymbol{t}\right).$$

Puisque $q_{\{1,\dots,r\}}$ est unitaire de degré j, il s'ensuit que :

$$\Xi_r = c_{\boldsymbol{e}} \int_{[1,X]^r} \frac{(\log(\prod_{i=1}^r t_i))^j}{\prod_{i=1}^r t_i} d\boldsymbol{t} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{r+j-1}\right).$$

Par développment multinomial, on obtient :

$$\begin{aligned}\Xi_r &= c_{\boldsymbol{e}} \sum_{a_1+\dots+a_r=j} \begin{pmatrix} j \\ a_1 \dots a_r \end{pmatrix} \int_{[1,X]^r} \frac{\prod_{i=1}^r (\log t_i)^{a_i}}{\prod_{i=1}^r t_i} d\boldsymbol{t} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{r+j-1}\right)\\ &= c_{\boldsymbol{e}} \sum_{a_1+\dots+a_r=j} \begin{pmatrix} j \\ a_1 \dots a_r \end{pmatrix} \frac{(\log X)^{r+j}}{\prod_{i=1}^r (a_i+1)} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{r+j-1}\right)\\ &= c_{\boldsymbol{e}} V_{r,j} (\log X)^{r+j} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{r+j-1}\right).\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la condition 1, on montre par ailleurs que pour tout $J \subsetneq \{1, \dots, r\}$ de cardinal n :

$$\Xi_J \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{n+j}.$$

Anisi, on obtient

$$\sum_{\forall i,\ x_i \leqslant X} \frac{(\log\langle \boldsymbol{x}\rangle)^j}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{1}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) V_{r,j} c_{\boldsymbol{e}} (\log X)^{r+j} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} (\log X)^{r+j-1}\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

4.6.4 Sommation sur les fibres

Nous allons commencer par évaluer $\sum_{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})$ pour des x_j assez grands. Plus précisément, fixons un élément $\mathbf{W} \in [1, P]^r$ et considérons :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, \mathbf{W}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P \\ \boldsymbol{w} > \mathbf{W}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w}),$$

$$p_r(t) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r+1+l}}{l!} t^l.$$

Lemme 4.6.9. *Soit $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille. Supposons de plus que $\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P^{\frac{1}{2}}$ et que $\min_{j\in\{1,\dots,r\}} W_j \geqslant \log(P)^{\frac{2r}{\delta}}$. On a alors :*

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, \mathbf{W}) = c_{\boldsymbol{e}} p_r \left(\log\left(\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}}\right)\right) P + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^r (\min_{j\in\{1,\dots,r\}} W_j)^{-\frac{\delta}{2r}}\right).$$

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin du résultat ci-dessous :

Lemme 4.6.10. *Soient r et J deux entiers naturels. Pour tout $t \in \mathbf{C}$, on a :*

$$(1-t)^r \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r \leqslant J \\ \forall k,\ j_k \geqslant 0}} t^{j_1+\dots+j_r} = 1 - t^{J+1} \sum_{l=0}^{r-1} \binom{J+l}{l} (1-t)^l.$$

Démonstration. Voir [B-B, Lemme 2.9]. □

Démonstration du lemme 4.6.9. Nous allons nous ramener à l'évaluation des sommes

$$H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-) = \sum_{\mathbf{U}^- < \boldsymbol{u} \leqslant \mathbf{U}^+} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{u}).$$

Soit θ un réel, et J un entier naturel que nous préciserons ultérieurement. On suppose que $1 < \theta < 3$ et que $\theta^J = P/\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}$. Pour $j \geqslant 0$, nous poserons

$$U_{k,j} = W_k \theta^{\frac{j}{\alpha_k}},$$

et notons $\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}} = (U_{1,j_1}, \dots, U_{r,j_r})$. Nous considérons alors les boîtes $\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}} < \boldsymbol{u} \leqslant \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}$ qui sont incluses dans $\{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P\}$ lorsque $\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \theta^{(\sum_{k=1}^r j_k)+r} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P$, ce qui est vrai si et seulement si $|\boldsymbol{j}|_1 = j_1 + \dots + j_r \leqslant J - r$. Soit $\boldsymbol{u}$ tel que $\boldsymbol{u} > \mathbf{W}$ et $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P$. Il existe alors un unique $\boldsymbol{j} \in \mathbf{N}^r$ tel que $\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}} < \boldsymbol{u} \leqslant \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}$. Les inégalités $\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P$ impliquent $|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J$. On a donc que

$$\sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J-r} H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}) \leqslant \Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, \mathbf{W}) \leqslant \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J} H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}). \tag{4.125}$$

En notant pour tout $\mathbf{X} \in \mathbf{N}^r$:

$$H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{X}) = \sum_{\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{X}} h_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{X}),$$

on obtient alors l'identité :

$$H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^r} (-1)^{r-|\boldsymbol{s}|_1} H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{s}}). \tag{4.126}$$

Par ailleurs, d'après la condition 1. :

$$H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{s}}) = c_{\boldsymbol{e}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \theta^{|\boldsymbol{j}+\boldsymbol{s}|_1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} (\min W_j)^{-\delta} \theta^{|\boldsymbol{j}+\boldsymbol{s}|_1}\right).$$

Posons à présent $J^+ = J$ et $J^- = J - r$ et étudions les sommes :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^+ = \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^+} H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}),$$

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^- = \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^-} H_{\boldsymbol{e}}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}+\mathbf{1}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}).$$

Les égalités précédentes donnent alors :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^{\pm} = c_{\boldsymbol{e}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^{\pm}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^r} (-1)^{r - |\boldsymbol{s}|_1} \theta^{|\boldsymbol{j}+\boldsymbol{s}|_1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} (\min W_j)^{-\delta} \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^{\pm}} \theta^{|\boldsymbol{j}|_1} \right).$$

En utilisant l'égalité :

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^r} (-1)^{r - |\boldsymbol{s}|_1} T^{|\boldsymbol{s}|_1} = (T-1)^r,$$

on a

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^{\pm} = c_{\boldsymbol{e}} (\theta - 1)^r \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^{\pm}} \theta^{|\boldsymbol{j}|_1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} W_{j_0}^{-\delta} \sum_{|\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J^{\pm}} \theta^{|\boldsymbol{j}|_1} \right), \tag{4.127}$$

avec $W_{j_0} = \min W_j$. Le terme d'erreur peut être majoré par

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} W_{j_0}^{-\delta} \theta^J \operatorname{Card}\{\boldsymbol{j} \in \mathbf{N}^r \mid |\boldsymbol{j}|_1 \leqslant J\} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P J^r W_{j_0}^{-\delta}.$$

En utilisant l'égalité du lemme 4.6.10 avec $t = \theta$ dans la formule (4.127), et en multipliant par $(-1)^r$ on trouve alors (en rappelant que $\theta^J = P/\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}$) :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^+ = c_{\boldsymbol{e}} P \theta \sum_{l=0}^{r-1} \binom{J+l}{l} (-1)^{r+1+l} (\theta - 1)^l + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P J^r W_{j_0}^{-\delta}\right),$$

et de même :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^- = c_{\boldsymbol{e}} P \theta^{1-r} \sum_{l=0}^{r-1} \binom{J-r+l}{l} (-1)^{r+1+l} (\theta - 1)^l + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P J^r W_{j_0}^{-\delta}\right).$$

Choisissons à présent $J = \lfloor W_{j_0}^{\delta/2r} \rfloor$, de sorte que $J \geqslant \log P$ et que $1 < \theta \leqslant e$. On a alors

$$\theta = \exp\left(J^{-1} \log\left(\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}} \right) \right) = 1 + J^{-1} \log\left(\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}} \right) + O\left(J^{-2} (\log P)^2\right)$$

(car on a supposé $\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P^{\frac{1}{2}}$). D'autre part, on remarque que

$$\binom{J+l}{l} = \frac{J^l}{l!} + O(J^{l-1})$$

et par conséquent

$$\binom{J+l}{l}(\theta-1)^l = \frac{1}{l!}\log\left(\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}}\right)^l + O\left(J^{-1}(\log P)^{l+1}\right).$$

On multiplie cette égalité par $(-1)^{r+l+1}$ et on somme sur $l \in \{0, ..., r-1\}$. En rappelant que

$$p_r(t) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r+l+1}}{l!} t^l,$$

on obtient donc que :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^+ = c_{\boldsymbol{e}} P p_k\left(\log\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}\left(P(\log P)^r J^{-1} + \mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}} + PW_{j_0}^{-\delta} J^r\right)\right) \tag{4.128}$$

$$= c_{\boldsymbol{e}} P p_k\left(\log\frac{P}{\mathbf{W}^{\boldsymbol{\alpha}}}\right) + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^r W_{j_0}^{-\frac{\delta}{2r}}\right). \tag{4.129}$$

De façon analogue on obtient exactement la même formule asymptotique pour $\Upsilon_{\boldsymbol{e}}^-$ et donc pour $\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, \mathbf{W})$ d'après (4.125). □

4.6.5 Démonstration du théorème 4.6.2

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 4.6.2. Dans ce qui va suivre, nous considérerons $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille. On vérifie facilement qu'alors $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ est une $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu', \delta', \boldsymbol{\beta})-$ famille pour tous $\nu' \leqslant \nu$, $\delta' \leqslant \delta$, et on peut donc supposer dorénavant que $\nu \leqslant \frac{1}{2\sum_{j=1}^r \alpha_j}$ et $\delta \leqslant \frac{1}{2}$. Fixons par ailleurs les paramètres

$$A = D + (r+1)\max_{j\in\{1,...,r\}}(\alpha_j) + \nu^{-1}(1 + \max_{j\in\{1,...,r\}}(\alpha_j)), \tag{4.130}$$

$$B = 4Ar^2/\delta. \tag{4.131}$$

Introduisons un paramètre $V \geqslant 4$ et supposons que P est tel que $V^{B^r} \leqslant P^\nu$. On pose alors

$$V_0 = 1,\ V_1 = V,\ \forall k \in \{1, ..., r\},\ V_k = V^{B^{k-1}},\ V_{r+1} = P,$$

et

$$\mathcal{V}_0 = [V_0, V_1],\ \forall k \in \{1, ..., r\},\ \mathcal{V}_k =]V_k, V_{k+1}]$$

de sorte que

$$[1, P] = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{V}_k.$$

Par le principe des tiroirs, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_r) \in \mathbf{N}^r$ tel que $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P$, il existe au moins un $l \in \{0, ..., r\}$ tel que $x_j \notin \mathcal{V}_l$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. On note alors $l(\boldsymbol{x})$ le plus grand de ces entiers l. Posons ensuite pour tout $l \in \{0, ..., r\}$:

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},l}(P) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P \\ l(\boldsymbol{x})=l}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x})$$

(on remarque que $\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P) = \sum_{l=0}^{r} \Upsilon_{\boldsymbol{e},l}(P)$). Remarquons que la condition $l(\boldsymbol{x}) = r$ équivaut à dire que $|x_j| \leqslant V_r$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$. Donc, d'après la condition 1, on obtient la borne :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},r}(P) \leqslant H_{\boldsymbol{e}}(V_r, ..., V_r) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \prod_{j=1}^{r} V_r^{\alpha_j} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} V^{B^r \sum_{j=1}^{r} \alpha_j} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons à présent $\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}^r$ tel que $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P$ et $l(\boldsymbol{x}) = l$ avec $l \in \{0, ..., r - 1\}$. On peut associer à un tel $\boldsymbol{x}$ les ensembles

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \{j \in \{1, ..., r\} \mid x_j \leqslant V_l\},$$

$$\forall m \in \{l + 1, ..., r\}, \ \mathcal{L}_m(\boldsymbol{x}) = \{j \in \{1, ..., r\} \mid x_j \in \mathcal{V}_m\}.$$

On observe que $\{1, ..., r\} = \mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \sqcup \left(\bigsqcup_{m=l+1}^{r} \mathcal{L}_m\right)$, et on note

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{J}(\boldsymbol{x}), \mathcal{L}_{l+1}(\boldsymbol{x}), ..., \mathcal{L}_r(\boldsymbol{x})).$$

Une partition $\mathcal{A} = (\mathcal{J}, \mathcal{L}_{l+1}, ..., \mathcal{L}_r)$ de $\{1, ..., r\}$ telle que $\mathcal{L}_m \neq \emptyset$ pour tout $m \in \{l + 1, ..., r\}$ sera dite *admissible pour* l. On a alors pour tout $l \in \{0, ..., r - 1\}$:

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},l}(P) = \sum_{\substack{\mathcal{A} \text{ admissible} \\ \text{pour } l}} \Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P),$$

où

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) = \sum_{\substack{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}).$$

Nous allons à présent utiliser cette décomposition de $\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P)$ pour démontrer le résultat ci-dessous :

Lemme 4.6.11. *Soit* $(h_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ *une* $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ *famille. On a alors pour tout* $\boldsymbol{e}$ *:*

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P) = \frac{c_{\boldsymbol{e}}}{(r-1)!} P(\log P)^{r-1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^{r-2} \log(\log P)\right).$$

Démonstration. Le cas $r = 1$ est immédiat d'après la condition 1. Nous supposerons donc dorénavant $r \geqslant 2$, et nous choisissons $V = (\log P)^B$.

On considère l'ensemble $\mathcal{A} = (\emptyset, \{1, ..., r\})$ qui est admissible pour $r-1$. Si $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}$, alors pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $x_j \geqslant V_{r-1}$ et $x_j \in \mathcal{V}_r =]V_r, P]$. On en déduit que

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) = \Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, (V_r, ..., V_r).$$

Puisque $V_r = (\log P)^{B^r}$ et que $B^r = (\frac{4Ar^2}{\delta})^r \geqslant \frac{2r}{\delta} \geqslant 1$, on peut appliquer le lemme 4.6.9, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, (V_r, ..., V_r)) &= c_{\boldsymbol{e}} p_r \left(\log \left(\frac{P}{\prod_{j=1}^r V_r^{\alpha_j}} \right) \right) P + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P (\log P)^r (\log P)^{-\frac{B^r \delta}{2r}} \right) \\
&= \frac{c_{\boldsymbol{e}}}{(r-1)!} P (\log P)^{r-1} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P (\log P)^{r-2} \log(\log P) \right).
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que pour tout autre ensemble $\mathcal{A}$ admissible pour l, la somme $\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P)$ est du type $\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P (\log P)^{r-2} \log(\log P)\right)$. Commençons par traiter le cas où $\mathcal{J} = \emptyset$. Considérons un ensemble $(\emptyset, \mathcal{L}_{l+1}, ..., \mathcal{L}_r)$ admissible pour l. Nous avons déjà traité les cas $l = r$ et $l = r-1$. Nous supposons donc que $l \in \{0, ..., r-2\}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}^r$ tel que $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{L}_{l+1} \neq \emptyset$, il existe un certain $j_0 \in \{1, ..., r\}$ tel que $x_{j_0} \in \mathcal{V}_{l+1}$. Quitte à permuter les variables, nous pouvons supposer, pour simplifier, que $j_0 = 1$. On a alors, pour tout $j \neq 1$, $x_j \geqslant V_{l+1}$. En utilisant le lemme 4.6.9 (en remarquant que $V_{l+1} > (\log P)^{2r/\delta}$ puisque $B > \frac{2r}{\delta}$) on en déduit l'estimation :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) &\leqslant \sum_{V_{l+1} < x_1 \leqslant V_{l+2}} \sum_{\substack{\forall j \neq 1,\, x_j \geqslant V_{l+1} \\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant P}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, (V_{l+1}, V_{l+1}, ..., V_{l+1})) - \Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, (V_{l+2}, V_{l+1}, ..., V_{l+1})) \\
&= c_{\boldsymbol{e}} P \left(p_r \left(\log \frac{P}{\prod_{j=1}^r V_{l+1}^{\alpha_j}} \right) - p_r \left(\log \frac{P}{V_{l+2}^{\alpha_1} \prod_{j=2}^r V_{l+1}^{\alpha_j}} \right) \right) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P) \\
&\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \alpha_1 P \log \left(\frac{V_{l+2}}{V_{l+1}} \right) (\log P)^{r-2} + O\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P (\log P)^{r-2} \log(\log P) \right) \\
&\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P (\log P)^{r-2} \log(\log P).
\end{aligned}$$

Supposons à présent que $\mathcal{A} = (\mathcal{J}, \mathcal{L}_{l+1}, ..., \mathcal{L}_r)$ est admissible pour l avec $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Puisque tous les $\mathcal{L}_m$ sont non vides, on a $l \geqslant 1$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $\mathcal{J} = \{1, ..., k\}$ pour un certain $k \geqslant 1$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}^r$ tel que $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}$. On pose $\boldsymbol{w} = (x_1, ..., x_k)$ et $\boldsymbol{y} = (x_{k+1}, ..., x_r)$. On a alors que $y_j > V_{l+1}$ pour tout j et $w_j \leqslant V_l$, et donc :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) \leqslant \sum_{\forall j \in \{1,...,k\},\, x_j \leqslant V_l} \sum_{\prod_{j=k+1}^r y_j^{\alpha_j} \leqslant \frac{P}{\prod_{j=1}^k x_j^{\alpha_j}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}).$$

Or, d'après le lemme 4.6.9 on a :

$$\sum_{\prod_{j=k+1}^{r} y_j^{\alpha_j} \leqslant \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j}}} h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$$

$$= \frac{c_{\boldsymbol{e},\{1,...,k\}}(\boldsymbol{w})}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j}} P p_{r-k}\left(\log \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j} \prod_{j=k+1}^{r} V_{l+1}^{\alpha_j}}\right)$$

$$+ O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P V_{l+1}^{-\delta} (\log P)^r (\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j})^A)$$

$$\ll \frac{c_{\boldsymbol{e},\{1,...,k\}}(\boldsymbol{w})}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j}} P(\log P)^{r-k-1} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P V_{l+1}^{-\delta} (\log P)^r (\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j})^A.$$

Puis, en sommant sur les $\boldsymbol{w}$ tels que $|\boldsymbol{w}| \leqslant V_l$ et en utilisant le théorème 4.6.8, on obtient

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^{r-k-1}(\log V_l)^k + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \prod_{j=1}^{k} V_l^{A+1} V_{l+1}^{-\delta/2r} (\log P)^r$$

$$\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^{r-k-1}(\log(\log P))^k + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \prod_{j=1}^{k} (\log P)^{r+kB^l(A+1)-B^{l+1}\delta/2r}$$

$$\ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P(\log P)^{r-2} \log(\log P) + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} \prod_{j=1}^{k} (\log P)^{r-2}$$

(par définition B, on a en effet $kB^l(A+1) - B^{l+1}\delta/2r \leqslant -2$). □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 4.6.2 :

Démonstration du théorème 4.6.2. Posons $\kappa = \frac{\nu}{(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j) B^r}$ et choisissons $V = P^{\kappa}$. Nous allons montrer que pour un ensemble $\mathcal{A}$ admissible pour $l \in \{0, ..., r-1\}$, il existe un polynôme $p_{\mathcal{A},\boldsymbol{e}}$ de degré au plus $r-1$ à coefficients du type $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ tel que :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) = P p_{\mathcal{A},\boldsymbol{e}}(\log P) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^{1-\eta}) \tag{4.132}$$

pour un certain $\eta > 0$. Commençons par considérer le cas où $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathcal{L}_{l+1}, ..., \mathcal{L}_r\}$ admissible pour l. Si $l = r-1$, alors $\mathcal{L}_r = \{1, ..., r\}$ et $\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) = \Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P, (V_r, ..., V_r))$ et on a donc :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) = c_{\boldsymbol{e}} P p_r\left(\log \frac{P}{V_r^{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j}}\right) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P V_r^{-\delta/2r})$$

$$= c_{\boldsymbol{e}} P p_r\left(\log \frac{P}{V_r^{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j}}\right) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^{1-\eta})$$

pour $0<\eta<\frac{\nu}{rB}$. Si à présent $l\in\{0,...,r-2\}$, on a alors si $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}$ pour tout $m\in\{l+1,...,r-1\}$, $V_m<x_j\leqslant V_{m+1}$, $\forall j\in\mathcal{L}_m$ et on en déduit :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P)=\sum_{\mathbf{V}=(V^{(1)},...,V^{(r)})}(-1)^{\varepsilon(\mathbf{V})}\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P,\mathbf{V}),$$

avec $V^{(j)}\in\{V_m,V_{m+1}\}$ pour $j\in\mathcal{L}_m$ et $V^{(j)}=V_r$ si $j\in\mathcal{L}_r$, et avec $\varepsilon(\mathbf{V})\in\{0,1\}$ pour tout $\mathbf{V}$. Puisque $V=P^{\kappa}$, d'après le lemme 4.6.9 :

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P,\mathbf{V})=c_{\boldsymbol{e}}Pp_r\left(\log\frac{P}{\prod_{j=1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j}}\right)+O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}P^{1-\eta}).$$

Puisque tous les $V^{(j)}$ sont des puissances de P, on a que $\log\frac{P}{\prod_{j=1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j}}$ est un multiple de $\log P$, et on obtient donc bien la formule (4.132) pour $\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P)$.

Considérons à présent $\mathcal{A}=\{\mathcal{J},\mathcal{L}_{l+1},...,\mathcal{L}_r\}$ est admissible pour l avec $\mathcal{J}\neq\emptyset$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer $\mathcal{J}=\{1,...,k\}$. Nous noterons alors $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}$, comme dans la démonstration du théorème précédent. On obtient alors

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P)=\sum_{|\boldsymbol{w}|\leqslant V_l}\sum_{\substack{\prod_{j=k+1}^{r}y_j^{\alpha_j}\leqslant\frac{P}{\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j}}\\ \forall j\in\mathcal{L}_m,\,y_j\in\mathcal{V}_m}}h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}).$$

Comme précédemment, nous pouvons écrire

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P)=\sum_{\substack{\forall j\in\{1,...,k\}\\ x_j\leqslant V_l}}\sum_{\mathbf{V}=(V^{(1)},...,V^{(r)})}(-1)^{\varepsilon(\mathbf{V})}\sum_{\substack{\prod_{j=k+1}^{r}y_j^{\alpha_j}\leqslant\frac{P}{\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j}}\\ \boldsymbol{y}\geqslant\mathbf{V}}}h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}).$$

Or, d'après le lemme 4.6.5 et le lemme 4.6.9

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\prod_{j=k+1}^{r}y_j^{\alpha_j}\leqslant\frac{P}{\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j}}\\ \boldsymbol{y}\geqslant\mathbf{V}}}h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\\ &\qquad=\frac{c_{\boldsymbol{e},\{1,...,k\}}(\boldsymbol{w})}{\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j}}Pp_{r-k}\left(\log\frac{P}{\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j}\prod_{j=k+1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j}}\right)\\ &\qquad\qquad+O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}P^{1}V_{l+1}^{-\delta}(\log P)^{r}(\prod_{j=1}^{k}x_j^{\alpha_j})^{A}).\end{aligned}$$

Remarquons que $\prod_{j=k+1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j} = P^{\rho}$ pour un certain $\rho > 0$, et donc que

$$\log \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j} \prod_{j=k+1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j}} = (1-\rho)\log P - \log \prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j}.$$

Le polynôme $p_{r-k}\left(\log \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} x_j^{\alpha_j} \prod_{j=k+1}^{r}(V^{(j)})^{\alpha_j}}\right)$ peut donc se réécrire comme un polynôme en $\log P$ (à coefficients $O(1)$). En sommant sur $\mathbf{V}$ et sur $\boldsymbol{w}$, on obtient alors qu'il existe un polynôme $p_{\mathcal{A},\boldsymbol{e}}$ à coefficients $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ tels que :

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\boldsymbol{e},\mathcal{A}}(P) &= p_{\mathcal{A},\boldsymbol{e}}(\log P)P + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^1 V_{l+1}^{-\delta}(\log P)^r (\prod_{j=1}^{k} V_l^{\alpha_j+1})^A) \\ &= p_{\mathcal{A},\boldsymbol{e}}(\log P)P + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^{1-\eta}),\end{aligned}$$

pour un certain $\eta > 0$, d'où le résultat. Nous avons donc établi la formule (4.132) pour tout ensemble $\mathcal{A}$ admissible pour $l \in \{0, ..., r-1\}$. Nous en déduisons qu'il existe un polynôme $p_{\boldsymbol{e}}^*$ de degré au plus $r-1$ à coefficients $O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}})$ tel que

$$\Upsilon_{\boldsymbol{e}}(P) = p_{\boldsymbol{e}}^*(\log P) + O(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} P^{1-\eta}).$$

Or, d'après le lemme 4.6.11, nous savons alors que $p_{\boldsymbol{e}}^*(t)$ est du type $\frac{c_{\boldsymbol{e}}}{(r-1)!}t^{r-1} + \sum_{k=0}^{r-2} \alpha_k t^k$, avec $\alpha_k \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}$ pour tout k, ce qui clôt la démonstration du théorème. □

4.6.6 Application du théorème 4.6.2

Comme nous l'avons annoncé à la fin de la section 4.2, nous allons chercher à appliquer le théorème 4.6.2 aux familles de fonctions $(\overline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{n+r}}$ et $(\underline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{n+r}}$. Pour cela, il convient de vérifier que ces familles de fonctions sont bien des $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})-$ famille pour des paramètres $(\boldsymbol{\alpha}, D, \nu, \delta, \boldsymbol{\beta})$ bien choisis.

Rappelons que par définition :

$$\overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1, ..., k_r) = \mathrm{Card}\Big\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}\setminus\{0\})^{n+r} \mid \boldsymbol{e}.\boldsymbol{x} \in U,\ F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x}) = 0,$$
$$\forall j \in \{1, ..., r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor = k_j,\ \forall i \in \{1, ..., n+r\},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\Bigg\}.$$

Or, nous avons vu que, puisque $\sum_{\forall j\in\{1,...,r\}, k_j\leqslant P_j} = N_{U,\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_r)$, d'après le théorème 4.5.1, $(\underline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{n+r}}$ vérifie la condition 1. pour $\alpha_j = n_j - d_j$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $c_{\boldsymbol{e}} = C_{\sigma,\boldsymbol{e}}$ et $\boldsymbol{\beta}$ défini par

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}} = \max\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1}, \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

(le fait que $C_{\sigma,\boldsymbol{e}} \ll \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\beta}}$ découle de la remarque 4.3.26).

On remarque que, pour tous $\boldsymbol{k} = (k_{m+1}, ..., k_r)$ et tous $P_1, ..., P_m$, pour

$$\phi_m(\boldsymbol{k}) = \{(x_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{A}_m^\lambda \cap \mathbf{Z}^s, \mid \forall j \in \{1, ..., r\},\ \left\lfloor |(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{x})^{E(n+j)}| \right\rfloor = k_j,$$
$$\forall i \in \{1, ..., n+r\},\ |x_i| \leqslant \frac{1}{e_i}\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^{a_{i,j}}\}$$

$$\sum_{\forall j\in\{1,...,m\}, k_j \leqslant P_j} \overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1, ..., k_r)$$
$$= \sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\phi_m(\boldsymbol{k})} N_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}}(P_1, ..., P_m) + O(E)$$

où

$$E = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\sum_{m'=1}^{r-1}\sum_{(x_i)_{i\in I_{m',\sigma}}\notin\mathcal{A}_{m',\sigma}^{\lambda_\sigma}} \left(\prod_{i\notin I_{m',\sigma}} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_{\sigma(j)}}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_{m,\sigma}} a_{i,\sigma(j)}}\right)$$
$$\ll \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j+4d_j}\right) P_{\sigma(r)}^{-\lambda_\sigma/2}.$$

D'autre part, la formule du corollaire 4.4.11, est valable pour tous $(x_i)_{i\in I_m}, \boldsymbol{k}$ tels que $\left(e_{0,m}\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 P^{-1+3\tilde{d}_m\theta} < 1$, où $P = \prod_{j=1}^{m} P_j^{d_j}$. Par conséquent, on obtient, uniformément pour tous $(k_{m+1}, ..., k_r)$ tels que $\left(e_0\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 < P^{1-3\tilde{d}_m\theta}$ donc en particulier pour $\left(e_0\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right)^2 < \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{d_j}\right)^{\frac{7}{10}}$ (puisque $\theta < \frac{1}{10\tilde{d}_m}$) :

(4.133)
$$\sum_{\forall j\in\{1,...,m\}, k_j \leqslant P_j} \overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1, ..., k_r) = \sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\phi_m(\boldsymbol{k})} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}}$$
$$\left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1}\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right)$$
$$+O\left(\left(e_0^4\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j+4d_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) P^{-\delta}\right).$$

On peut en fait remplacer la condition $\left(e_0 \prod_{j=m+1}^r k_j^{d_j}\right) < \left(\prod_{j=1}^m P_j^{d_j}\right)^{\frac{7}{20}}$ par

$$\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j} < \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{d_j}\right)^{\frac{1}{10}-\delta}, \tag{4.134}$$

avec $\delta > 0$ arbitrairement petit. En effet, si l'on suppose $e_0 \leqslant \left(\prod_{j=1}^m P_j^{d_j}\right)^{\frac{1}{4}+\delta}$, alors la condition (4.134) implique :

$$\left(e_0 \prod_{j=m+1}^{r} k_j^{d_j}\right) < \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{d_j}\right)^{\frac{1}{10}+\frac{1}{4}} = \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{d_j}\right)^{\frac{7}{20}},$$

et donc la formule (4.133) est vérifiée.

Si l'on suppose à présent que $e_0 > \left(\prod_{j=1}^m P_j^{d_j}\right)^{\frac{1}{4}+\delta}$ on a alors que, d'après les lemmes 4.4.9 et 4.4.7 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x_i)_{i\in I_m}\in\phi_m(\boldsymbol{k})} \mathfrak{S}_{(x_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{e}} J_{(x_i,e_i)_{i\in I_m},\boldsymbol{k}} \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) \\
&\ll e_{0,m}^{2+\delta} \left(\prod_{i\notin I_m} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{\sum_{i\notin I_m} a_{i,j}+4d_j+\delta}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) \operatorname{Card}\phi_m(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad \ll e_0^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j+4d_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j}\right) P^{-\delta},
\end{aligned}$$

et d'autre part, $\sum_{\forall j\in\{1,\dots,m\},k_j\leqslant P_j} \overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1,\dots,k_r)$ peut être majoré trivialement par

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j}\right) \\
&\qquad \ll e_0^4 \left(\prod_{i=1}^{n+r} e_i\right)^{-1} \left(\prod_{j=m+1}^{r} k_j^{n_j+4d_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} P_j^{n_j-d_j-\delta}\right).
\end{aligned}$$

La formule (4.133) est donc vérifiée. Ainsi, on a que la condition 2. est vérifiée par $(\overline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ pour $D = \max_{j\in\{1,\dots,r\}}\{n_j + 4d_j\}$ et $\nu = \frac{1}{\max_{j\in\{1,\dots,r\}} d_j}\left(\frac{1}{10} - \delta\right)$. Nous pouvons donc bien appliquer le théorème à la famille $(\overline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$ et nous obtenons :

$$\sum_{\prod_{j=1}^r k_j^{n_j-d_j}\leqslant B} \overline{h}_{\boldsymbol{e}}(k_1,...,k_r)$$
$$= C_{\sigma,\boldsymbol{e}}B(\log B)^{r-1}+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)B(\log B)^{r-2}\right).$$

Par les mêmes calculs, on trouve exactement le même résultat avec $(\underline{h}_{\boldsymbol{e}})_{\boldsymbol{e}}$, et on en déduit le théorème ci-dessous :

Théorème 4.6.12. *Si l'on a $n+r>\mathfrak{m}$, alors pour tout $\sigma\in\Delta_{\max}$:*

$$N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}(B)=\frac{1}{(r-1)!}C_{\sigma,\boldsymbol{e}}B\log(B)^{r-1}+O\left(\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)B\log(B)^{r-2}\right).$$

Remarque 4.6.13. *On remarque que, d'après le lemme 4.5.2 on a*

$$\mathfrak{m}\leqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j}+4)\left(\prod_{j=1}^r(3+10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^r d_j\right)+\max_{\substack{m\in\{1,...,r\}\\ \sigma\in\mathfrak{S}_r}}\max_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}}\dim V^*_{\tau,m,\boldsymbol{t},(j,k)}.$$

Par conséquent, si l'on note

$$n(F)=n+r-\max_{\substack{m\in\{1,...,r\}\\ \tau\in\mathfrak{S}_r}}\min_{\boldsymbol{t}^{(m,\tau)}\in\mathcal{D}_{m,\tau}}\max_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}}\dim V^*_{\tau,m,\boldsymbol{t}^{(m,\tau)},(j,k)},$$

où $\mathcal{D}^*_{m,\tau}=\{\boldsymbol{d}=(d_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{C}_{m,\tau}}\in\mathbf{N}^{\mathcal{C}_{m,\tau}}\mid F_{\boldsymbol{d}}\neq 0\}$, alors le théorème 4.6.12 est vérifié lorsque

$$n(F)\geqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j}+4)\left(\prod_{j=1}^r(3+10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^r d_j\right).$$

4.7 Conclusion et interprétation des constantes

Nous allons à présent conclure quant à la formule asymptotique pour

$$\mathcal{N}_V(B)=\mathrm{Card}\{P=\pi(\boldsymbol{x})\in Y(\mathbf{Q})\mid \boldsymbol{x}\in V(\mathbf{Q})\mid H_{D_0}(P)\leqslant B\},$$

où V est l'ouvert $V=\pi(U)$ de X. Nous avons vu dans la section 3.2.2 que

$$\mathcal{N}_V(B)=\frac{1}{2^r}\mathcal{N}_{0,U}(B),$$

où

$$\mathcal{N}_{0,U}(B) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \cap U \mid \\ F(\boldsymbol{x}) = 0,\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}) = 1,\ H_0(\boldsymbol{x}) \leqslant B\}.$$

Nous avons par ailleurs :

$$\mathcal{N}_{0,U}(B) = \sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} N_{U,\sigma}(B) + O\left(B(\log B)^{r-2}\right)$$

où

$$N_{U,\sigma}(B) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z} \setminus \{0\})^{n+r} \cap C_{0,\sigma} \cap U \mid \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}) = 1, \\ F(\boldsymbol{x}) = 0,\ H_0(\boldsymbol{x}) \leqslant B\}.$$

Nous allons à présent relier le cardinal $N_{U,\sigma}(B)$ à $N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}$ via une inversion de Möbius afin d'en déduire une formule asymptotique pour $\mathcal{N}_V(B)$ à partir du théorème 4.6.12.

4.7.1 Sommation de Möbius

Définissons à présent la fonction arithmétique μ (cf. [Sa, Proposition 11.9]) : Pour tout $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{n+r}$ on pose :

$$\chi(\boldsymbol{e}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{e}^{\underline{\sigma}}) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\chi_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{e}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \forall i \in \{1, ..., n+r\},\ d_i | e_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il existe alors (voir [Sa, Proposition 11.9]) une unique fonction arithmétique $\mu : \mathbf{N}^{n+r} \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$:

$$\chi(\boldsymbol{e}) = \sum_{\boldsymbol{d}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}} \mu(\boldsymbol{d})\chi_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{e}).$$

Donnons quelques propriétés de cette fonction μ.

Lemme 4.7.1. *Si, pour p premier,*

$$\chi^{(p)}(\boldsymbol{e}) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad p \nmid \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{e}^{\underline{\sigma}}) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

alors on a

$$\chi^{(p)} = \sum_{\substack{\boldsymbol{d}=(p^{\nu_1},...,p^{\nu_{n+r}}) \\ \nu_1,...,\nu_{n+r}\in\mathbf{N}^{n+r}}} \mu(\boldsymbol{d})\chi_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{e}).$$

De plus, si $\boldsymbol{d} = (p^{\nu_1}, ..., p^{\nu_{n+r}})$, avec l'un des ν_i supérieur ou égal à 2, alors $\mu(\boldsymbol{d}) = 0$.

Lemme 4.7.2 (Salberger). *1. Soient* $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \in (\mathbf{N}^*)^{n+r}$ *et* $\delta = \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{d}^{\underline{\sigma}})$, $\varepsilon = \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{e}^{\underline{\sigma}})$. *Si* $\mathrm{pgcd}(\delta,\varepsilon)=1$, *alors*

$$\mu(\boldsymbol{d}.\boldsymbol{e}) = \mu(\boldsymbol{d})\mu(\boldsymbol{e}).$$

2. Soit f le plus petit entier tel qu'il existe f arêtes de Δ non contenues dans un cône de Δ. Alors le produit eulérien :

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{d}=(p^{\nu_1},\dots,p^{\nu_{n+r}})\\ \nu_1,\dots,\nu_{n+r}\in\mathbf{N}^{n+r}}}\frac{|\mu(\boldsymbol{d})|}{\left(\prod_{i=1}^{n+r} d_i\right)^s}\right)$$

est absolument convergent pour $s > \frac{1}{f}$.

Démonstration. Voire [Sa, Lemme 11.15]. □

On a alors :

$$N_{U,\sigma}(B) = \sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}} \mu(\boldsymbol{e}) N_{\boldsymbol{e},\sigma,U}.$$

Donc, en utilisant le théorème 4.6.12, on obtient :

$$N_{U,\sigma}(B) = \left(\frac{1}{(r-1)!}\sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}\mu(\boldsymbol{e})C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\right)B(\log B)^{r-1}$$
$$+\,O\left(\sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}|\mu(\boldsymbol{e})|\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)B(\log B)^{r-2}\right).$$

Notons à présent $I_1,\dots,I_N$ les ensembles I minimaux pour l'inclusion tels que

$$\forall\sigma\in\Delta,\ \sum_{i\in I}\mathbf{R}^+v_i\not\subseteq\sigma.$$

Par hypothèse, pour tout k, $\mathrm{Card}\, I_k \geqslant 6$. Dans ce cas, si l'on observe que, pour tout $\boldsymbol{e}$ tel que $\mu(\boldsymbol{e})\neq 0$, on a

$$e_0 \leqslant \mathrm{ppcm}_{i=1}^{n+r}(e_i) \leqslant \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ \exists i\ |\ p|e_i}} p \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{\frac{1}{\min_k \mathrm{Card}\, I_k}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}|\mu(\boldsymbol{e})|\left(e_0^{4+\delta}\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-1}+\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\ll \sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}|\mu(\boldsymbol{e})|\left(\prod_{i=1}^{n+r}e_i\right)^{-\frac{1}{3}+\delta},$$

et cette série converge d'après le lemme 4.7.2.

Ainsi,

$$\begin{aligned}N_{U,\sigma}(B) &= \left(\frac{1}{(r-1)!}\sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}\mu(\boldsymbol{e})C_{\sigma,\boldsymbol{e}}\right)B(\log B)^{r-1}+O(B(\log B)^{r-2})\\ &= \frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}\frac{\mu(\boldsymbol{e})\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}}{\prod_{i=1}^{n+r}e_i}\right)J_\sigma B(\log B)^{r-1}+O(B(\log B)^{r-2})\end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-(n+r)}\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}\sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q}F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right)$$

$$J_\sigma = \int_{\mathbf{R}}\int_{C_\sigma(\mathbf{R})\cap[-1,1]^{n+r}} e\left(\beta F(\boldsymbol{u})\right)d\boldsymbol{u}d\beta.$$

On obtient donc finalement, en remarquant que $\bigcup_{\sigma\in\Delta_{\max}} C_\sigma(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n+r}$ et que l'intersection des $C_\sigma(\mathbf{R})$ est de mesure nulle (en effet, si $\boldsymbol{x}\in C_\sigma(\mathbf{R})\cap C_\tau(\mathbf{R})$, alors $|\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}| = |\boldsymbol{x}^{D(\tau)}|$)

Théorème 4.7.3. *Si l'on a*

$$n(F) \geqslant r(8.2^{\sum_{j=1}^r d_j}+4)\left(\prod_{j=1}^r(3+10d_j)\right)\left(\sum_{j=1}^r d_j\right),$$

et si Δ est tel que, pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\operatorname{Card} I_k\geqslant 6$, *alors*

$$\mathcal{N}_V(B) = \frac{1}{(r-1)!}\frac{1}{2^r}\mathfrak{S}JB(\log B)^{r-1}+O(B(\log B)^{r-2}), \tag{4.135}$$

où

$$\mathfrak{S} = \sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}}\frac{\mu(\boldsymbol{e})\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}}{\prod_{i=1}^{n+r}e_i} \tag{4.136}$$

et

$$J = \sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} J_\sigma = \int_{\mathbf{R}}\int_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n+r}\,|\\ \max_{\sigma\in\Delta_{\max}}|\boldsymbol{u}^{D(\sigma)}|\leqslant 1}} e\left(\beta F(\boldsymbol{u})\right)d\boldsymbol{u}d\beta. \tag{4.137}$$

Nous allons à présent chercher à interpréter les constantes intervenant dans la formule (4.135) en terme des mesures de Tamagawa et démontrer ainsi que la constante $\frac{1}{(r-1)!}\frac{1}{2^r}\mathfrak{S}J$ est bien celle conjecturée par Peyre, ce qui achèvera la démonstration du théorème 4.1.1

Avant d'aller plus loin, rappelons la définition des formes de Leray $\omega_{L,\nu}$ et des mesures de Tamagawa ω_ν pour $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$.

Considérons un point $\boldsymbol{x}_0 \in Y_0$, tel que $\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, ..., n+r\}$, et on note $P_0 = \pi(\boldsymbol{x}_0)$. La forme de Leray ω_L est définie sur un voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ sur lequel $\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}} \neq 0$ par :

$$\omega_L(\boldsymbol{x}) = \frac{(-1)^{n+r-i_0}}{\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{x})} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_0}} \wedge ... \wedge dx_{n+r}(\boldsymbol{x}).$$

Pour tout $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$, la forme de Leray induit une mesure locale $\omega_{L,\nu}$ sur $Y_0(\mathbf{Q}_\nu)$. On suppose à présent que $\boldsymbol{x}_0$ est tel que $x_{0,i} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n+r\}$. Pour $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})$, on considère le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \rho : Y_{\mathbf{Q}_\nu} & \to & \mathbf{A}^{n-1}_{\mathbf{Q}} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \left(\frac{x_i}{\prod_{j=1}^r x_{n+j}^{a_{i,j}}} \right)_{i \neq i_0} \end{array}$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de P_0 noté V_0 sur lequel ρ est bien défini et induit un difféomorphisme analytique sur $\rho(V_0)$. On note alors $W_0 = \pi^{-1}(V_0)$ et $\boldsymbol{u} = ((u_i)_{i \in \{1,...,n\}}, \underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ éléments}})$. La mesure de Tamagawa ω_ν est définie par :

$$\rho_* \omega_\nu = \frac{du_{1,\nu} ... \widehat{du_{i_0,\nu}} ... du_{n,\nu}}{h_\nu(\boldsymbol{u}) \left| \frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{u}) \right|_\nu}$$

(où u_{i_0} est défini implicitement par $F(\boldsymbol{u}) = 0$), avec

$$h_\nu(\boldsymbol{u}) = \max_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\boldsymbol{u}^{D(\sigma)}|_\nu.$$

4.7.2 Étude de la série singulière $\mathfrak{S}$

Posons

$$A_{\boldsymbol{e}}(q) = q^{-(n+r)} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \sum_{\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q} F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b}) \right).$$

On a alors $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} = \sum_{q=1}^{\infty} A_{\boldsymbol{e}}(q)$.

Lemme 4.7.4. *Pour tout élément $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$, la fonction $A_{\boldsymbol{e}}$ est multiplicative.*

Démonstration. Considérons $q_1, q_2 \in \mathbf{N}$ tels que $\mathrm{pgcd}(q_1, q_2) = 1$ et $q = q_1 q_2$. On remarque que

$$A_{\boldsymbol{e}}(q_1)A_{\boldsymbol{e}}(q_2) = q^{-(n+r)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{\substack{\boldsymbol{b}_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^{n+r} \\ \boldsymbol{b}_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^{n+r}}} e\left(\frac{a_1 q_2 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b}_1) + a_2 q_1 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b}_2)}{q_1 q_2}\right).$$

Or, si l'on considère l'unique élément $\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}$ tel que $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}_1\ (q_1)$ et $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}_2\ (q_2)$. On a alors

$$\begin{cases} q_2 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b}_1) \equiv q_2 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\ (q) \\ q_1 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b}_2) \equiv q_1 F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\ (q) \end{cases},$$

et par conséquent

$$A_{\boldsymbol{e}}(q_1)A_{\boldsymbol{e}}(q_2) = q^{-(n+r)} \sum_{\substack{a_1 \in (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \\ a_2 \in (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^*}} \sum_{\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q} F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right).$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{Z}/q_1\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/q_2\mathbf{Z})^* & \to & (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^* \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 q_2 + a_2 q_1 \end{array}$$

est bijective . On obtient donc finalement

$$A_{\boldsymbol{e}}(q_1)A_{\boldsymbol{e}}(q_2) = q^{-(n+r)} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*} \sum_{\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{q} F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right) = A_{\boldsymbol{e}}(q).$$

□

Puisque nous avons vu avec le lemme 4.3.24 que la série $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}$ est absolument convergente, on a donc :

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{\boldsymbol{e}}(p^k) \right). \tag{4.138}$$

Remarquons à présent que pour tous $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{n+r}$ et $k \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{p^k} F(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{b})\right) = \sum_{\boldsymbol{b} \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{a}{p^k} F((p^{v_p(e_i)} b_i)_{i \in \{1,\dots,n+r\}})\right)$$

(en effet si $\mathrm{pgcd}(q, p) = 1$, $b \mapsto qb$ est une bijection de $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$). Par conséquent, on a

$$A_{\boldsymbol{e}}(p^k) = A_{(p^{v_p(e_i)})_{i \in \{1,\dots,n+r\}}}(p^k),$$

et en utilisant la formule (4.138), on trouve :

$$\frac{\mu(\boldsymbol{e})\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}}{\prod_{i=1}^{n+r} e_i} = \prod_{p\in\mathcal{P}} B_{(p^{v_p(e_i)})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}}$$

où pour tous $\nu_1, ..., \nu_{n+r} \in \mathbf{N}^{n+r}$:

$$B_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}} = \frac{\mu(p^{\nu_1}, ..., p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} A_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}}(p^k).$$

La série $\mathfrak{S} = \sum_{\boldsymbol{e}\in(\mathbf{N}^*)^{n+r}} \frac{\mu(\boldsymbol{e})\mathfrak{S}_{\boldsymbol{e}}}{\prod_{i=1}^{n+r} e_i}$ étant absolument convergente, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{\nu_1,\dots,\nu_{n+r}\in\mathbf{N}} B_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}} \right) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} B_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}} \right) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} \frac{\mu(p^{\nu_1}, ..., p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} A_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}}(p^k) \right).
\end{aligned}$$

Notons à présent :

(4.139)
$$M_p^*(k) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+r} \mid p \nmid \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}(\boldsymbol{x}^{\underline{\sigma}}) \text{ et } F(\boldsymbol{x}) \equiv 0\ (p^k)\},$$

et

(4.140)
$$\sigma_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} \frac{\mu(p^{\nu_1}, ..., p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} A_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}}(p^k) \right).$$

Lemme 4.7.5. *Pour tout entier $m > 0$, on a*

$$\frac{M_p^*(m)}{p^{m(n+r-1)}} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_{n+r}\in\{0,1\}} \frac{\mu(p^{\nu_1}, ..., p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} A_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,\dots,n+r\}}}(p^k),$$

et donc

$$\sigma_p = \lim_{m\to\infty} \frac{M_p^*(m)}{p^{m(n+r-1)}}.$$

Démonstration. On pose $q = p^m$. Il est alors immédiat que :

$$q^{-1} \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{t}{q} F(\boldsymbol{b})\right) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^{n+r} \mid F(\boldsymbol{x}) \equiv 0\ (q)\},$$

et plus généralement pour tout $\nu_1, ..., \nu_{n+r} \in \{0,1\}$:

$$q^{-1}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}} e\left(\frac{t}{q}F((p^{\nu_i}b_i)_{i\in\{1,...,n+r\}})\right)$$
$$= \left(\prod_{l=1}^{n+r} p^{\nu_l}\right)\mathrm{Card}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}^{n+r} \mid x_i\equiv 0\ (p^{\nu_i}),\ F(\boldsymbol{x})\equiv 0\ (q)\}.$$

On a donc que, en utilisant le lemme 4.7.4 et la formule (4.140) :

$$\begin{aligned} M_p^*(m) &= q^{-1}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}}\sum_{(\nu_1,...,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} \\ &\quad \frac{\mu(p^{\nu_1},...,p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} e\left(\frac{t}{q}F((p^{\nu_i}b_i)_{i\in\{1,...,n+r\}})\right) \\ &= q^{-1}\sum_{q_1|q}\sum_{\substack{0\leqslant a<q_1\\ \mathrm{pgcd}(a,q_1)=1}}\sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{n+r}}\sum_{(\nu_1,...,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} \\ &\quad \frac{\mu(p^{\nu_1},...,p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} e\left(\frac{a}{q_1}F((p^{\nu_i}b_i)_{i\in\{1,...,n+r\}})\right) \\ &= p^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{p^{m(n+r)}}{p^{k(n+r)}}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*}\sum_{\boldsymbol{b}\in(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^{n+r}}\sum_{(\nu_1,...,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}} \\ &\quad \frac{\mu(p^{\nu_1},...,p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}} e\left(\frac{a}{p^k}F((p^{\nu_i}b_i)_{i\in\{1,...,n+r\}})\right) \\ &= p^{m(n+r-1)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{(\nu_1,...,\nu_{n+r})\in\{0,1\}^{n+r}}\frac{\mu(p^{\nu_1},...,p^{\nu_{n+r}})}{p^{\sum_{i=1}^{n+r}\nu_i}}A_{(p^{\nu_i})_{i\in\{1,...,n+r\}}}(p^k) \\ &= p^{m(n+r-1)}\sigma_p. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.7.6. *Pour tout $N\in\mathbf{N}^*$, on note*

$$W_p^*(N) = \{\boldsymbol{x}\in(\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+r} \mid \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}\boldsymbol{x}^{\sigma}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),\ F(\boldsymbol{x})\equiv 0\ (p^N)\}$$

de sorte que $M_p^*(N)=\mathrm{Card}\, W_p^*(N)$. Il existe alors un entier N_0 tel que pour tout $N\geqslant N_0$:

$$\int_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{x})=0\\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}}\boldsymbol{x}^{\sigma}\not\equiv\mathbf{0}\ (p),}}\omega_{L,p} = \frac{M_p^*(N)}{p^{N(n+r-1)}}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_p^{n+r}$. Dans tout ce qui suit, on note

$$[\boldsymbol{x}]_N = \boldsymbol{x} \mod p^N.$$

On écrit alors :

$$\int_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_p^{n+2} \mid F(\boldsymbol{x})=0 \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^\sigma \not\equiv \mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \mod p^N \mid F(\boldsymbol{x}) \equiv 0\ (p^N) \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^\sigma \not\equiv \mathbf{0}\ (p)}} \int_{\substack{\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{u})=0 \\ [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u}) \tag{4.141}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x} \in W_p^*(N)} \int_{\substack{\boldsymbol{u}, \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{u})=0 \\ [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u}). \tag{4.142}$$

Puisque Y est lisse, il existe un entier $N > 0$ assez grand tel que, pour tout $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{Z}_p/p^N)^{n+r}$ et tout $\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r}$ tel que $[\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}$, $\mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{u}^{\underline{\sigma}} \not\equiv \mathbf{0}\ (p)$ et $F(\boldsymbol{u}) = 0$:

$$c = \inf_i \{ v_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}) \right) \}$$

soit non nul et constant sur la classe définie par $\boldsymbol{x}$. On peut supposer que $N > c$ et que $c = v_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{x}) \right)$ pour un $i_0 \in \{1, ..., n+r\}$ fixé. On considère $\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r}$ tel que $[\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{u}' \in \mathbf{Z}_p^{n+r}$ quelconque. On a alors

$$F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = F(\boldsymbol{u}) + \sum_{i=0}^{n+r} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}) u_i' + G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'),$$

où $G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$ est une somme de termes contenant au moins deux facteurs u_i'. Ainsi, on a donc, si $\boldsymbol{u}' \in (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+r}$:

$$F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') \equiv F(\boldsymbol{u})\ (p^{N+c}).$$

Par conséquent, l'image de $F(\boldsymbol{u})$ dans $\mathbf{Z}_p/p^{N+c}$ dépend uniquement de $\boldsymbol{u}$ mod $p^N = \boldsymbol{x}$, on note alors $F^*(\boldsymbol{x})$ cette image.

Si $F^*(\boldsymbol{x}) \neq 0$, alors l'intégrale

$$\int_{\substack{\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=0 \\ [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u})$$

est nulle, et l'ensemble

$$\{ \boldsymbol{u} \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x},\ F(\boldsymbol{u}) \equiv 0\ (p^{N+c}) \}$$

est vide.

Si $F^*(\boldsymbol{x}) = 0$ alors, par le lemme de Hensel, les applications coordonnées $X_1, ..., X_{i_0-1}, X_{i_0+1}, ..., X_{n+r}$ définissent un isomorphisme de

$$\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x},\ F(\boldsymbol{u}) = 0\}$$

sur

$$\hat{\boldsymbol{x}} + (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+r-1},$$

où $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, ..., x_{n+r})$. Par conséquent, on a :

$$\int_{\substack{\boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{u})=0 \\ [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x}}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{u}) = \int_{\hat{\boldsymbol{x}} + (p^N \mathbf{Z}_p)^{n+r-1}} p^c dx_1 ... dx_{i_0-1} dx_{i_0+1} ... dx_{n+r} = p^{c-N(n+r-1)}.$$

On a d'autre part, puisque $F(\boldsymbol{u}) \mod p^{N+c}$ ne dépend que de $\boldsymbol{x}$:

$$p^{-(N+c)(n+r-1)} \operatorname{card}\{\boldsymbol{u} \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x},\ F(\boldsymbol{u}) \equiv 0 (p^{N+c})\} = p^{-(N+c)(n+r-1)} p^{(n+r-1)c} = p^{c-N(n+r-1)}.$$

On a donc finalement :

$$\int_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{x})=0 \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma} \not\equiv \mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p} = \sum_{\substack{\boldsymbol{x} \in W_p^*(N) \\ F^*(\boldsymbol{x})=0}} p^{c-N(n+r-1)}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}, \in W_p^*(N)} p^{-(N+c)(n+r-1)} \operatorname{card}\{\boldsymbol{u} \mod p^{N+c} \mid [\boldsymbol{u}]_N = \boldsymbol{x},\ F(\boldsymbol{u}) \equiv 0 (p^{N+c})\}$$
$$= \frac{M_p^*(N+c)}{p^{(N+c)(n+r-1)}}.$$

D'où le résultat.

□

Remarquons à présent que, puisque l'on a supposé qu'une puissance de ω_Y^{-1} est engendrée par ses sections globales, d'après la proposition 3.2.9, pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, $D(\sigma)$ a pour support $\bigcup_{i \notin \sigma(1)} D_i$ et il existe des entiers $(a_i)_{i \notin \sigma(1)}$ strictement positifs tels que $D(\sigma) = \sum_{i \notin \sigma(1)} a_i D_i$. On en déduit donc que

$$\mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma} \not\equiv \mathbf{0}\ (p) \Leftrightarrow \mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{D(\sigma)} \not\equiv \mathbf{0}\ (p) \Leftrightarrow h_p(\boldsymbol{x}) = 1.$$

Lemme 4.7.7. *On l'égalité*

$$\sigma_p = \int_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_p^{n+r} \mid F(\boldsymbol{x})=0 \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma} \not\equiv \mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \omega_p(Y(\mathbf{Q}_p)).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que pour tout ouvert V_0 de Y sur lequel ρ est bien défini et induit un difféomorphisme analytique sur $\rho(V_0)$:

$$\int_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}_p^{n+r}\cap W \mid \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma}\not\equiv\mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^r \omega_p(V_0(\mathbf{Q}_p)),$$

où $W_0 = \pi^{-1}(V_0)$.

On peut écrire :

$$\int_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}_p^{n+r}\cap W_0 \mid \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma}\not\equiv\mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbf{N}^r} \int_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}_p^{n+r}\cap W_0 \mid \\ \forall j,\ |x_{n+j}|_p = p^{-\alpha_j} \\ h_p(\boldsymbol{x})=1}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}).$$

En effectuant le changement de variables $x_i = \prod_{j=1}^r p^{\alpha_j a_{i,j}} u_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n+r\}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z}_p^{n+r}\cap W_0 \mid \\ \mathrm{pgcd}_{\sigma\in\Delta_{\max}} \boldsymbol{x}^{\sigma}\not\equiv\mathbf{0}\ (p)}} \omega_{L,p}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbf{N}^r} \int_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbf{Q}_p^{n+r}\cap W_0 \mid (p^{\alpha_1},\dots,p^{\alpha_r}).\boldsymbol{u}\in\mathbf{Z}_p^{n+r} \\ h_p(\boldsymbol{u}) = \left(\prod_{j=1}^r p^{\alpha_j(n_j-d_j)}\right)^{-1} \\ \forall j,\ |u_{n+j}|_p=1}} \frac{du_1\wedge\dots\wedge\widehat{du_{i_0}}\wedge\dots\wedge du_{n+r}}{\left(\prod_{j=1}^r p^{\alpha_j(n_j-d_j)}\right)^{-1} \left|\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{u})\right|_p} \\
&= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbf{N}^r} \int_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbf{Q}_p^{n+r}\cap W_0 \mid (p^{\alpha_1},\dots,p^{\alpha_r}).\boldsymbol{u}\in\mathbf{Z}_p^{n+r} \\ h_p(\boldsymbol{u}) = \left(\prod_{j=1}^r p^{\alpha_j(n_j-d_j)}\right)^{-1} \\ \forall j,\ |u_{n+j}|_p=1}} \frac{du_1\wedge\dots\wedge\widehat{du_{i_0}}\wedge\dots\wedge du_{n+r}}{h_p(\boldsymbol{u}) \left|\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{u})\right|_p}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u_i = \prod_{j=1}^r u_{n+j}^{a_{i,j}} v_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et en remarquant que pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$

$$\int_{u_{n+j} \mid |u_{n+j}|_p=1} du_{n+j} = 1 - \frac{1}{p},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{p}\right)^r \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbf{N}^r} \int_{\substack{\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)\in V_0 \mid \\ (p^{\alpha_1},\dots,p^{\alpha_r}).\boldsymbol{v}\in\mathbf{Z}_p^n}} &\frac{dv_1\wedge\dots\wedge\widehat{dv_{i_0}}\wedge\dots\wedge dv_n}{h_p((\boldsymbol{v},1,\dots,1)) \left|\frac{\partial F}{\partial x_{i_0}}(\boldsymbol{v},1,\dots,1)\right|_p} \\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right)^r \omega_p(V_0(\mathbf{Q}_p)).
\end{aligned}$$

□

4.7.3 Étude de l'intégrale singulière J

Rappelons que l'on a

$$J = \int_{\mathbf{R}} \int_{\boldsymbol{x} \in \Phi} e\left(\beta F(\boldsymbol{x})\right) d\boldsymbol{x} d\beta.$$

où $\Phi = \{\mathbf{R}^{n+r} \mid \max_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\boldsymbol{x}^{D(\sigma)}| \leqslant 1\}$. Posons $\tau_\infty = \omega_\infty$ et montrons que :

$$\tau_\infty(Y) = \int_{\pi^{-1}(Y) \cap \Phi} \omega_{L,\infty} = \frac{\prod_{j=1}^r (n_j - d_j)}{2^r} J.$$

Ceci peut être démontré en invoquant comme dans la section 3.8.1 la proposition 3.8.2 issue de [Pe2]. Nous allons appliquer cette proposition aux variétés X et Y, avec $k = \mathbf{Q}$, $\nu = \infty$ et $f = F$. Si l'on montre que la proposition s'applique dans ce cadre, on aura alors pour tout fonction ϕ, C^∞ à support compact sur $\mathcal{T}_X(\mathbf{R})$:

$$\int_{\mathcal{T}_Y(\mathbf{R})} \phi(\boldsymbol{x}) \omega_{\mathcal{T}_Y,\infty}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathcal{T}_X(\mathbf{R})} \phi(\boldsymbol{x}) e(\beta F(\boldsymbol{x})) \omega_{\mathcal{T}_X,\infty}(\boldsymbol{x}) d\beta.$$

Quitte à approximer l'indicatrice du domaine Φ par des fonctions $\phi \in C^\infty(\mathcal{T}_X(\mathbf{R})) = C^\infty(\mathbf{R}^{n+r})$, on obtient alors

$$\sigma_\infty(Y) = \int_{\boldsymbol{x} \in \Phi} \omega_{\mathcal{T}_Y,\infty}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\Phi} e(\beta F(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x} d\beta = J.$$

Nous allons donc montrer que la proposition s'applique bien au cas qui nous intéresse.

Dans le cas présent nous avons :

$$C_{\text{eff}}(\bar{X}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{R}^+ . [D_{n+j}]$$

$$X^*(T_{NS}) = \bigoplus_{j=1}^r \mathbf{Z} . [D_{n+j}],$$

et donc

$$\mathbf{A}_{C_{\text{eff}}(\bar{X}), \mathbf{Q}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}[\sum_{j=1}^r [D_{n+j}]]) \simeq \mathbf{A}^r_{\mathbf{Q}}.$$

Donc en particulier $\mathbf{A}_{C_{\text{eff}}(\bar{X}), \mathbf{Q}}$ est non singulière, donc vérifie bien (G). D'autre part, le diviseur anticanonique de Y est, rappelons-le :

$$[\omega_Y^{-1}] = \sum_{j=1}^r (n_j - d_j)[\tilde{D}_{n+j}]$$

donc

$$\delta(\omega_Y^{-1}) = \inf_{(x_1,\dots,x_r)\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left\{ \sum_{j=1}^r x_j(n_j - d_j) \right\} = \inf_{j\in\{1,\dots,r\}} (n_j - d_j) \geqslant 1.$$

Le diviseur L associé à Y est $\sum_{j=1}^r d_j[D_{n+j}]$ et on obtient donc :

$$\delta(\omega_X^{-1} - 3L) = \inf_{(x_1,\dots,x_r)\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left\{ \sum_{j=1}^r x_j(n_j - 3d_j) \right\} = \inf_{j\in\{1,\dots,r\}} (n_j - 3d_j) \geqslant 1.$$

De plus, en remarquant que

$$C_{\mathrm{eff}}(\bar{Y}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{R}^+.[\tilde{D}_{n+j}]$$

qui est polyédrique rationnel. Les conditions de la proposition 3.8.2 sont donc toutes bien vérifiées.

4.7.4 Conclusion

Si S est un ensemble fini de places sur $\mathbf{Q}$ contenant la place infinie, et V une variété algébrique sur $\mathbf{Q}$, on note :

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\bar{V})) = \prod_{p\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})\setminus S} L_p(s, \mathrm{Pic}(\bar{V})) \tag{4.143}$$

$$L_p(s, \mathrm{Pic}(\bar{V})) = \frac{1}{\det(1 - p^{-s}\,\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(V_{\mathbf{F}_p} \otimes \mathbf{Q}))} \tag{4.144}$$

$$\lambda_\nu = \begin{cases} L_\nu(1, \mathrm{Pic}(\bar{V})) & \text{si} \quad \nu \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q}) \setminus S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.145}$$

La formule conjecturée par Peyre, Batyrev et Tschinkel pour $\mathcal{N}_V(B)$ (cf. [Pe2]) est :

$$\mathcal{N}_V(B) \sim_{B\to\infty} \alpha(Y)\beta(Y)\tau_H(Y)B(\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1} \tag{4.146}$$

où l'on a posé :

$$\alpha(Y) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1)!} \int_{C_{\mathrm{eff}}(Y)^\vee} e^{-\langle \omega_Y^{-1}, \boldsymbol{y}\rangle} d\boldsymbol{y}, \tag{4.147}$$

$$\beta(Y) = \mathrm{Card}(H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\bar{Y}))), \tag{4.148}$$

$$\tau_H(Y) = \lim_{s\to 1}(s-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(\bar{Y}))} L_S(s, \mathrm{Pic}(\bar{Y})) \prod_{\nu\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})} \lambda_\nu^{-1}\omega_\nu, \tag{4.149}$$

avec

$$C_{\mathrm{eff}}(Y)^\vee = \{\boldsymbol{y} \in (\mathrm{Pic}(Y)\otimes\mathbf{R}) \mid \forall \boldsymbol{x}\in C_{\mathrm{eff}}(Y),\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \geqslant 0\}. \tag{4.150}$$

Dans le cas présent on a :

$$\mathrm{Pic}(Y) = \bigoplus_{j=1}^r \mathbf{Z}.[\tilde{D}_{n+j}]$$

donc en particulier $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y)) = 3$, et d'autre part :

$$[-K_Y] = \sum_{j=1}^r (n_j - d_j).[\tilde{D}_{n+j}],$$

$$C_{\mathrm{eff}}(Y) = \sum_{j=1}^r \mathbf{R}^+.[\tilde{D}_{n+j}] \simeq (\mathbf{R}^+)^3.$$

En choisissant $S = \{\infty\}$,

$$\prod_{p\in\mathrm{Val}(\mathbf{Q})\setminus S} L_p(s, \mathrm{Pic}(\bar{Y})) = \zeta(s)^r$$

et donc

$$\lim_{s\to\infty}(s-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(Y))} L(s, \mathrm{Pic}(\bar{Y})) = 1,$$

et on a pour tout p premier,

$$\lambda_p^{-1} = \prod_{j=1}^r \left(1-\frac{1}{p}\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^r.$$

On a donc que

$$\tau_H(Y) = \omega_\infty \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^r \omega_p(Y) = \frac{1}{2^r}(\prod_{j=1}^r n_j - d_j)\mathfrak{S}J.$$

Par ailleurs, puisque $\mathrm{Pic}(\bar{Y}) \simeq \mathbf{Z}^r$, $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(\bar{Y})$ et on a donc que $\beta(Y) = 1$. Enfin on a que :

$$\begin{aligned}\alpha(Y) &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{[0,\infty]^r} e^{-\sum_{j=1}^r (n_j-d_j)t_j} dt_1 ... dt_r\\ &= \frac{1}{(r-1)!}\prod_{j=1}^r \int_0^\infty e^{-(n_j-d_j)t} dt\\ &= \frac{1}{(r-1)!}\frac{1}{\prod_{j=1}^r (n_j-d_j)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\alpha(Y)\beta(Y)\tau_H(Y)B(\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1} = \frac{1}{2^r}\frac{1}{(r-1)!}\mathfrak{S}JB(\log B)^{r-1},$$

et on retrouve donc bien la formule du théorème 4.7.3.

Bibliographie

[BT1] V. V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995) 591-635.

[BT2] V. V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci **82** (1996) 3220-3239.

[BT3] V. V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Manin's conjecture for toric varieties*, J.Algebraic Geom. **7** (1998) 15-53.

[B-B] V. Blomer, J. Brüdern, *Counting in hyperbolic spikes : the diophantine analysis of multihomogeneous diagonal equations*, J. reine angew, à paraître.

[Bi] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser A**265** (1961) 245-263.

[Br] T. D. Browning *Quantitative Arithmetic of Projective Varieties*, Progress in Mathematics. **277**. Birkhäuser (2009).

[Co] D. A. Cox *The homogenous coordinate ring of a toric variety*, J. Alg. Geom. **4** (1995) 17-50.

[Da] H. Davenport, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, 2^{eme} édition, Cambridge University Press, (2005).

[F] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, **131**, Princeton University Press, (1993).

[G-D] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, troisième partie, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **28**. (1964-67). 5-255.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. **52**, Springer-Verlag, New York (1977).

[HB] D. R. Heath-Brown, *The density of rational points on curves and surfaces*, Ann. Math. **155** (2002) 553-598.

[Ig] J. I. Igusa, *Lectures on forms of higher degree*, Tata institute of fundamental research, Bombay and Springer-Verlag, Berlin (1978).

[K] P. Kleinschmidt, *A classification of toric varieties with few generators*, Aequationes Math. **35** (1988) 254-266.

[Ma] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mémoires de la S.M.F, **80** (2000).

[M-V] D. Masser, J.D. Vaaler *Counting algebraic numbers with large height II*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 427-445.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79**. (1995) 101-218.

[Pe2] E. Peyre, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Progress in Mathematics. **199**. Birkhäuser (2001) 221-274.

[P-T] E. Peyre, Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence*, Math. of Comp. **70** (2000) 367-387.

[Sa] P. Salberger *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Astérisque. **251** (1998) 91-258.

[Sch1] D. Schindler, *Bihomogeneous forms in many variables*, J. reine angew, à paraître

[Sch2] D. Schindler, *Manin's conjecture for certain biprojective hypersurfaces*, J. Théorie des nombres de Bordeaux, à paraître.

[Schm] W. M. Schmidt, *The density of integer points on homogeneous varieties*, Acta. Math. **154** (1985) 243-296.

[W-W] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1927).

[Wi] M. L. Widmer, *Counting primitive points of bounded height*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010) 4793-4829..